



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

**ANNALES BAC
MATHÉMATIQUES
2022**

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ contact@pge-pgo.fr | 🔍 [pge-pgo.fr](https://www.pge-pgo.fr)

🌀 Baccalauréat spécialité Jour 2 🌀

Métropole Antilles-Guyane 9 septembre 2022

Exercice 1 7 points

Thèmes : probabilités

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.

Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.

On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

- Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4;
- Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7;
- La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

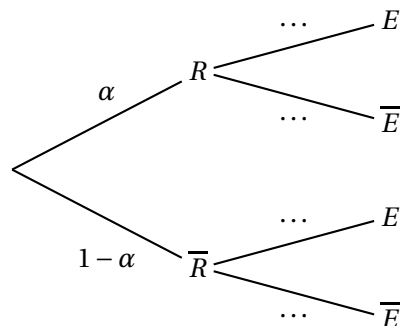
On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route »;
- E : « le client loue un vélo électrique »;
- \bar{R} et \bar{E} , évènements contraires de R et E .

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :

Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F .



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2.
 - a. Montrer que $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
 - b. En déduire que : $\alpha = 0,4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

Ce programme renvoie :

- a. u_{11} et v_{11} ; b. u_{10} et v_{11} ; c. les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10; d. u_{10} et v_{10} .

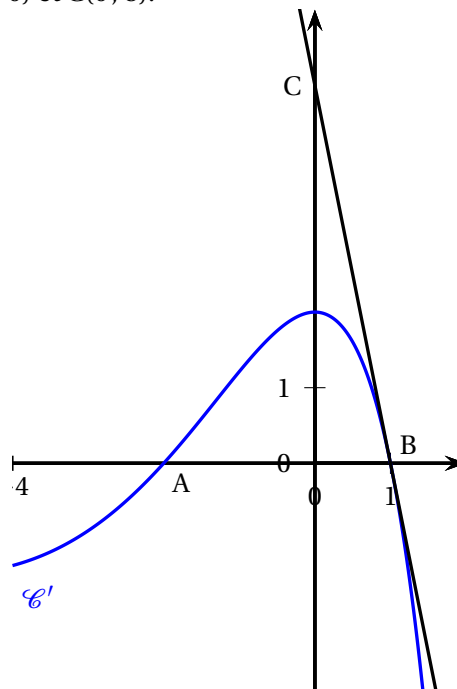
Pour les questions 4. et 5., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4; 2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f . On donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}' de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points $A(-2; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 5)$.

4. La fonction f est :

- a. concave sur $[-2; 1]$; b. convexe sur $[-4; 0]$;
c. convexe sur $[-2; 1]$; d. convexe sur $[0; 2]$.

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe \mathcal{C}' au point B. On a :

- a. $f'(1) < 0$; b. $f'(1) = 5$;
c. $f''(1) > 0$; d. $f''(1) = -5$.



6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(0) = 1$ est définie par :

- a. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; b. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - 2$;
c. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x + 1$; d. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x$.

Exercice 3 7 points

Thèmes : fonction logarithme, suites

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 7 points

Thèmes : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- la droite \mathcal{D} passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

- la droite \mathcal{D}' dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1.
 - a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{u}' de la droite \mathcal{D}' .
 - b. Montrer que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles.

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Cette droite Δ coupe chacune des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . On appellera M le point d'intersection de Δ et \mathcal{D} , et M' le point d'intersection de Δ et \mathcal{D}' .

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ .
3. On note \mathcal{P} le plan contenant les droites \mathcal{D} et Δ , c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .
- a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
- b. En déduire qu'une équation du plan \mathcal{P} est : $2x - y - 5z = 0$.
- c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et \mathcal{D}' .
Justifier que M' est également le point d'intersection de \mathcal{D}' et du plan \mathcal{P} .
En déduire que les coordonnées du point M' sont (3; 1; 1).
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1; 2; 0).
c. Calculer la distance MM' .
5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- a. Montrer que la droite d est parallèle au plan \mathcal{P} .
- b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan \mathcal{P} .
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM' en fonction de ℓ .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
- c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d , les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.