PGE ▪ PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

ANNALES CONCOURS

GEIPI POLYTECH

MATHS ET PHYSIQUE

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

0187660050 | contact@pge-pgo.fr | pge-pgo.fr

concours
Geipi Polytech

MATHÉMATIQUES
&
PHYSIQUE-CHIMIE

Epreuves du Mardi 30 avril 2019

Le sujet comporte ce livret d'énoncés et deux livrets « document réponses », l'un en Mathématiques, l'autre en Physique-Chimie.

Vous devez :

- Lire et appliquer les consignes listées sur les documents réponses
- Ecrire vos réponses dans les cadres prédéfinis.

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 h d'épreuves entre les sujets de Mathématiques et de Physique-Chimie.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.

Le sujet de **PHYSIQUE-CHIMIE** est composé de 4 exercices (pages 2 à 5).
La durée conseillée pour ce sujet est de 1h30.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Le sujet de **MATHÉMATIQUES** est composé de 4 exercices (pages 6 à 9).
La durée conseillée pour ce sujet est de 1h30.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Les fibres optiques constituent un élément essentiel de la révolution des télécommunications. Cette technologie augmente considérablement le débit des connexions Internet de 20 mégabits par seconde, à 100 mégabits par seconde. C'est par ce moyen que circulent plus de 80% des informations du trafic mondial longue distance. Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Données :

Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}00\times10^{8}$ m.s^{-1}

Vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n $v = \frac{c}{n}$.

Indice de l'air $n_0 = 1{,}000$

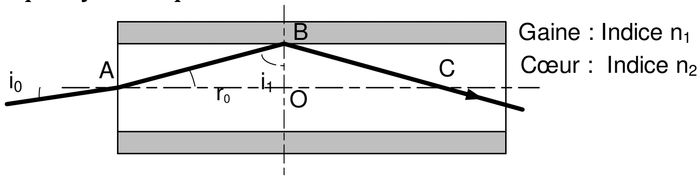
Constante de Planck $h = 6{,}63\times10^{-34}$ m^2.kg.s^{-1}

1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J

1re partie : Parcours du rayon dans une fibre optique cylindrique

La fibre utilisée est constituée :

- d'un cœur d'indice $n_2 = 1{,}510$,
- d'une gaine d'indice $n_1 = 1{,}495$.



Un rayon incident se propage dans l'air dans un plan axial à la fibre et arrive en A sous un angle d'incidence i_0. La réfraction est définie par la relation de Descartes : $n_0 \sin(i_0) = n_2 \sin(r_0)$.

On note i_1 l'angle que fait le rayon avec la normale séparant la gaine du cœur en B.

Afin que la totalité du rayon lumineux soit réfléchit, l'angle i_1 doit être supérieur à 81.92 °.

I-1- Dans ce cas limite, calculer l'angle réfracté $\mathbf{r_{0(limite)}}$ en A et l'angle incident $\mathbf{i_{0(limite)}}$ en A.

I-2- Comment régler $\mathbf{i_0}$ pour que la totalité du rayon lumineux soit réfléchie en B ?

I-3- Calculer le temps de parcours de la lumière pour parcourir une fibre de L_f =100 km lorsque i_0=0°.

I-4- Exprimer puis calculer le rapport $\frac{t_{ABC}}{t_{AOC}}$ en fonction de $\mathbf{r_{0(limite)}}$ entre le temps t_{ABC} de parcours de la lumière lors du chemin ABC et le temps t_{AOC} du parcours du chemin AOC.

I-5- En déduire le temps de parcours lorsque $\mathbf{i_0 = i_{0(limite)}}$.

I-6- Une variation de i_0 engendre donc une incertitude sur le temps de parcours de la forme $t_0 \pm \Delta t_0$. Calculer t_0 et Δt_0

2e partie : Etude de l'atténuation de transmission

L'atténuation de puissance subie par le signal lors du parcours d'une distance L suit la relation :

$\alpha\, L = -10\,\log(\frac{Puissance\ sortante}{Puissance\ incidante})$

Le tableau ci-contre donne les extrémums de la courbe $\alpha = f(\lambda)$ pour notre fibre.

Longueur d'onde λ (en nm)	Atténuation α (en dB/km)
850	3,0
1310	0,4
1400	2,0
1550	0,2

I-7- Quelle est la longueur d'onde la mieux adaptée à la transmission de l'information dans cette fibre optique ?

I-8- Donner le domaine de l'onde électromagnétique correspondant à cette longueur d'onde.

I-9- On doit amplifier à nouveau le signal dès que la puissance devient inférieure à 1% de sa puissance incidente. Quel est le nombre minimal d'amplificateurs nécessaires pour une liaison Brest-Strasbourg d'environ 1000 km ?

3e partie : Etude de la source Laser

I-10- Donner 2 caractéristiques principales du laser qui explique son utilisation pour générer le faisceau lumineux se propageant dans la fibre.

I-11- Quelle est la relation liant l'énergie E_{photon} du photon à sa longueur d'onde. Calculer cette énergie en eV pour une onde électromagnétique de longueur d'onde 1550 nm.

Physique-Chimie - EXERCICE II

L'acide oxalique est un diacide carboxylique de formule semi développée HOOC-COOH.
Présent à l'état naturel dans de nombreux végétaux, il est très bien toléré par l'organisme dans les aliments courants. Toutefois, consommé en trop grande quantité ou par des sujets sensibles, il peut conduire à certaines pathologies, voire être mortel à forte dose.

<u>Données</u> :
M(H) = 1 g.mol^{-1} ; M(C) = 12 g.mol^{-1} ; M(O) = 16 g.mol^{-1} ; M(K) = 39 g.mol^{-1} ; M(Mn) = 55 g.mol^{-1} ;
pK_{A1} (acide oxalique) = 1,25 ; pK_{A2} (acide oxalique) = 4,25

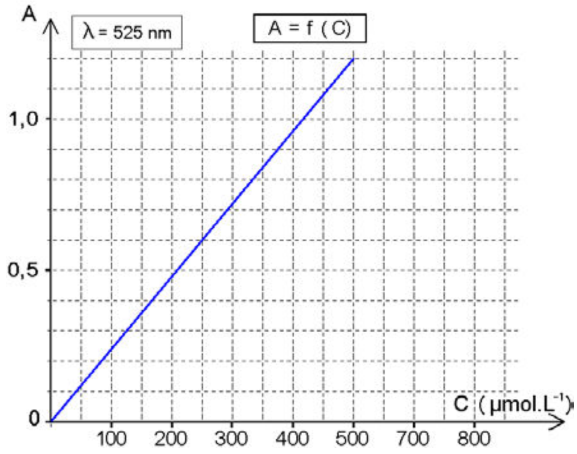
II-1- Donner la formule développée de la molécule d'acide oxalique.

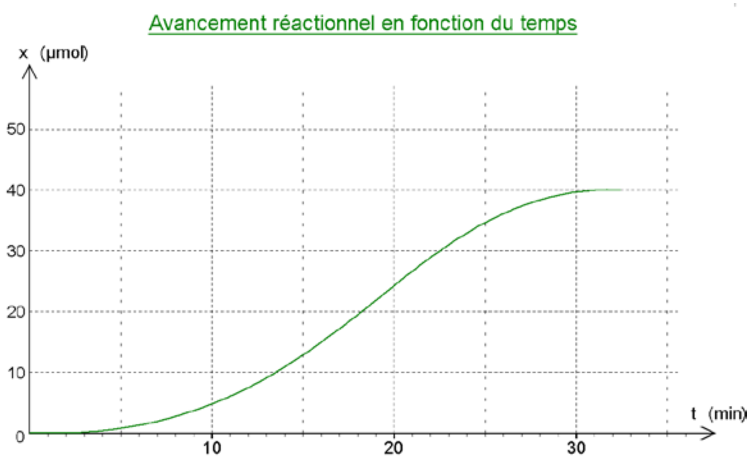
II-2- Préciser sur le diagramme de prédominance la nature des espèces prépondérantes.

On se propose de doser une solution aqueuse d'acide oxalique par une solution titrée de permanganate de potassium ($KMnO_4$) à $1{,}00 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1}.

II-3- Calculer la masse de permanganate de potassium à dissoudre dans 100,0 mL d'eau pure pour obtenir une concentration de $1{,}00 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1} = 1000 µmol.L^{-1}.

Cette solution est colorée par l'ion permanganate, ce qui permet d'en suivre la concentration par spectrophotométrie à l'aide de la courbe d'étalonnage A = f(C) ci-dessous.





Dans un réacteur thermostaté, on introduit 100,0 mL de la solution de permanganate de potassium de concentration $1{,}00 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1}, à 100,0 mL d'une solution d'acide oxalique de concentration inconnue. La réaction commence alors entre l'acide oxalique et l'ion permanganate ; cette réaction est totale :

$$5\, H_2C_2O_4 + 2\, MnO_4^- + 6\, H^+ = 10\, CO_2 + 2\, Mn^{2+} + 8\, H_2O$$

II-4- Préciser les deux couples oxydoréducteurs intervenant dans cette réaction.

On déclenche un chronomètre et on suit l'absorbance de la solution à λ = 525 nm en fonction du temps. On en déduit l'évolution de l'avancement en fonction du temps de réaction (courbe ci-dessus).

II-5- Donner la valeur du temps de demi-réaction :

II-6- Déterminer la vitesse de réaction à t = 20 minutes

II-7- Compléter le tableau d'avancement du document réponse.

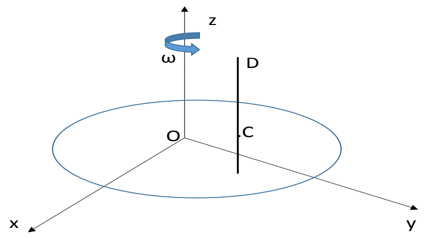
II-8- Donner la valeur de l'absorbance mesurée à t = 0 puis pour $t \to \infty$.

II-9- Désigner dans le document réponse l'allure de la courbe expérimentale A = f(t).

II-10- Déterminer la concentration de la solution d'acide oxalique de départ.

Physique-Chimie - EXERCICE III

Le petit Auguste est emmené par ses parents faire un tour de manège. Il veut monter sur un cheval de bois.
Le manège est représenté par un disque de centre O tournant dans le plan horizontal Oxy autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω.
Le repère Oxyz est donc le repère de référence fixe.
Le sens de rotation du manège est la senestre, soit le sens trigonométrique. Le référentiel est supposé galiléen.
On note T la période du mouvement : $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Le cheval de bois, noté C, est situé à la distance R de l'axe de rotation. On assimilera C à un point matériel.

Les équations horaires de ses coordonnées x et y en fonction du temps t sont : $x = R\cos(\omega t)$
$y = R\sin(\omega t)$

C est de plus animé d'un mouvement vertical oscillant le long d'un axe D d'amplitude A.
L'équation horaire de sa coordonnée z en fonction du temps t est : $z = A\sin(\omega t) + A$
Ainsi, à $t = 0$, on a $z = A$, etc…
On suppose, de plus, qu'à $t = 0$, le manège a été démarré et tourne en régime établi.

III-1- Exprimer, en fonction de la période T, le temps t_1 où le maximum de hauteur z_{max} est atteint.

III-2- Exprimer, en fonction de la période T, le temps t_2 où le minimum de hauteur z_{min} est atteint.

III-3- Calculer T, t_1 et t_2 lorsque $\omega = \pi/10$ rad.s^{-1},

III-4- Sur quelle forme proposée dans le document réponse peut-on dessiner la trajectoire de C ?

Auguste veut attraper le pompon, une petite poupée accrochée au plafond du manège. Le pompon est repéré par sa position (x_p, y_p ,3A). Il ne peut le faire que si le cheval se situe à sa hauteur maximale.

III-5- A quel endroit, le propriétaire du manège doit-il accrocher le pompon ? Donner pour cela les coordonnées x_p et y_p du pompon.

III-6- Exprimer les coordonnées V_x, V_y et V_z du vecteur vitesse $\vec{V}$ du cheval de bois C.

Rappel : $(\sin(\omega t))' = \omega\cos(\omega t)$, $(\cos(\omega t))' = -\omega\sin(\omega t)$

On décompose $\vec{V}$ en une somme de deux vecteurs, sa composante dans le plan Oxy et sa composante suivant Oz, soit $\vec{V} = \vec{V}_{xy} + \vec{V}_z$.

III-7- Donner l'expression de la norme $\|\vec{V}_{xy}\|$. Montrer qu'elle est indépendante du temps.

III-8- Exprimer les coordonnées a_x, a_y et a_z du vecteur accélération $\vec{a}$ du cheval C.

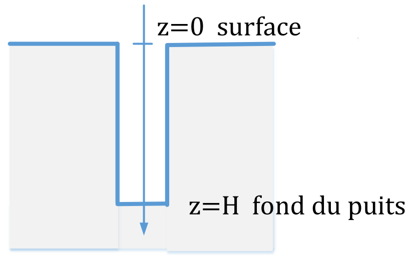
On pose de même $\vec{a} = \vec{a}_{xy} + \vec{a}_z$.

III-9- Dessiner les vecteurs $\vec{V}_{xy}$ et $\vec{a}_{xy}$ au point Q(-R, 0, A). (choix des échelles libre)

III-10- Comment qualifie-t-on la composante a_{xy} de l'accélération pour un tel mouvement ?

Physique-Chimie - EXERCICE IV

Deux étudiants, Sarah et Gaspard, cherchent à déterminer la profondeur du puits d'accès d'une mine. Celui-ci est vertical et suffisamment profond pour que le fond à la profondeur H soit invisible.
Gaspard propose de lâcher une pierre dans le puits et de déduire du temps de chute la profondeur du puits. Il analyse l'expérience en ne tenant compte de la seule pesanteur.



Soit t le temps écoulé à partir du moment où la pierre est lâchée à vitesse nulle au-dessus du puits, $z(t)$ la position de la pierre à l'instant t et $v(t)$ sa vitesse.
Données :
Accélération de pesanteur $g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Vitesse du son $c = 343$ m.s^{-1}
Masse de la pierre $m = 100$ grammes

IV-1- En faisant l'hypothèse que seule la force de pesanteur agit sur la pierre et en appliquant la 2ème loi de Newton, exprimer l'accélération verticale a.
IV-2- En déduire les expressions de la vitesse $v(t)$ et la position $z(t)$ au cours de la chute.
Soit t_1 le temps de chute mis par la pierre pour atteindre la profondeur H. On peut exprimer t_1 de la sorte $t_1 = \alpha\sqrt{H}$ avec α=0.452 SI.
IV-3- Donner l'expression littérale de α.
On mesure la durée $t_{mes} = 19{,}17\ s$ entre le moment du lâché et le moment où le son de choc est perçue à la surface.
IV-4- Exprimer ce temps en fonction de t_1 et du temps t_2 mis pour que le choc soit perçu, puis exprimer ce temps en fonction de H.
IV-5- On peut reformuler l'équation précédente sous la forme $\sqrt{H}^2 + \beta\sqrt{H} + \gamma = 0$ avec $\beta = 155\ SI$ et $\gamma = -6575\ SI$. Donner les expressions littérales de β et γ ainsi que leurs unités.
IV-6- Calculer la profondeur H du puits en résolvant numériquement l'équation en H.

Sarah estime qu'il faudrait prendre en compte, en plus de la pesanteur, une force de frottement $\vec{f}$. En appliquant ses cours de mécaniques des fluides, elle modélise cette force de la manière suivante :

- sa direction est celle du mouvement,
- son sens est opposé au mouvement,
- sa norme a pour expression $f = kv^2$ avec $k = 1{,}190\ 10^{-3}\ SI$.

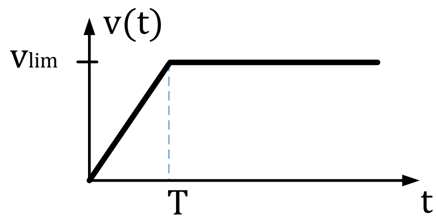
IV-7- En appliquant la 2^{e} loi de Newton, exprimer l'accélération verticale a' .
La vitesse limite v_{lim} est atteinte par la pierre lorsque l'accélération devient nulle.
IV-8- Exprimer puis calculer v_{lim}.

Sarah considère que le mouvement est en fait constitué de deux phases :

- une première de l'instant $t = 0$ à l'instant $T = \frac{v_{lim}}{g}$ où la force f ne s'exerce pas,
- une seconde phase pour t supérieur à T où la vitesse est constante et égale à v_{lim}.

(cf. représentation ci-contre)

Evolution de la vitesse de la pierre en fonction de la durée de chute.



IV-9- Définir le mouvement de la pierre lors la première phase puis lors la seconde phase.

IV-10- La profondeur atteinte z(t) après une durée de chute $t > T$ est telle que :

$z(t) = A * T^2 + B * (t - T)$ avec $A = 4.90$ SI et $B = 28.72$ SI. Donner les expressions des coefficients A et B ainsi que leurs unités.
IV-11- Exprimer l'estimation H' de la profondeur du puits en fonction de la durée mesurée t_{mes} entre le lâché de la pierre et le bruit de son arrivée. Calculer H'.

Chaque exercice contient des questions à choix multiples. Elles sont signalées par la mention **QCM***. Pour chaque* **QCM***, quatre réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisie(s) sur la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse sera pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.*

Mathématiques - EXERCICE I

I-1- **QCM**

Quel est l'ensemble E des réels x vérifiant $1 - \ln x \geq 0$?

A) $E = [1\,;+\infty[$ **B)** $E = [e\,;+\infty[$

C) $E =]-\infty\,;\,e]$ **D)** $E =]0\,;e]$

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$\text{pour tout réel } x > 0\,, \quad f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$.

I-2- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-3- On en déduit que C_f admet une asymptote Δ. Donner une équation de Δ.

I-4- Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Justifier la réponse.

I-5- g' désigne la dérivée de g. Calculer, pour tout $x > 0$, $g'(x)$. Détailler le calcul.

I-6- f' désigne la dérivée de f. Pour tout $x > 0$, on peut écrire $f'(x)$ sous la forme :

$$f'(x) = (1 - \ln x)\, h(x)$$

Donner l'expression de $h(x)$ en fonction de x. Quel est le signe de $h(x)$?

I-7- Dresser le tableau des variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

I-8 Soit A le point de C_f d'abscisse $x_A = e$ et d'ordonnée y_A .

Donner la valeur exacte de y_A , puis une valeur approchée de y_A à 10^{-1} près.

I-9- **QCM**

Soit B le point de C_f d'abscisse $x_B = 1$. T_B désigne la tangente à C_f au point B.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

A) T_B a pour équation $y = x - e$ **B)** T_B a pour équation $y = e\,x$

C) T_B a pour équation $y = x$ **D)** T_B passe par le point O

I-10- **QCM**

Soit C le point de C_f d'abscisse $x_C = \frac{1}{2}$ et d'ordonnée y_C . Que vaut y_C ?

A) $y_C = \frac{1}{4}$ **B)** $y_C = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}}$

C) $y_C = e^{\frac{\ln 2}{2}}$ **D)** $y_C = e^{-2\ln 2}$

I-11- Placer, sur la figure, les points A, B et C.

Tracer la droite Δ, la tangente T_B , la tangente à C_f au point A. Puis tracer la courbe C_f.

I-12- **VRAI-FAUX**

Soit m un réel. On s'intéresse au nombre de réels $x > 0$ vérifiant l'équation :

$$f(x) = m$$

Pour chacune des trois assertions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

A) Si $m \in]1\,;\,y_A[$, l'équation a exactement deux solutions

B) Si $m < 0$ ou $m \geq y_A$, l'équation n'admet aucune solution

C) Si $m = 1$, l'équation a exactement deux solutions

Mathématiques - EXERCICE II

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie - QCM

II -1- Lors d'une même expérience aléatoire, deux événements A et B vérifient :

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}6 \qquad P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

A) $P(A \cap B) = 0{,}1$ **B)** $P(A \cap B) = 0{,}24$

C) $P(A \cup B) = 1$ **D)** $P(A \cup B) = 0{,}9$

II -2- X désigne une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle [3 ; 18].
Soit p_1 la probabilité que X soit compris entre 5 et 10 sachant que X est strictement supérieur à 4. Que vaut p_1 ?

A) $p_1 = \frac{4}{15}$ **B)** $p_1 = \frac{5}{13}$

C) $p_1 = \frac{5}{14}$ **D)** $p_1 = \frac{1}{3}$

II -3- Soit $\lambda > 0$. X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
Soit p_2 la probabilité que X soit compris entre 2 et 5. Que vaut p_2 ?

A) $p_2 = \frac{e^{-2\lambda}}{e^{-5\lambda}}$ **B)** $p_2 = e^{-3\lambda}$

C) $p_2 = e^{-2\lambda} - e^{-5\lambda}$ **D)** $p_2 = e^{-5\lambda} - e^{-2\lambda}$

II -4- Soit $\lambda > 0$. X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
Soit p_3 la probabilité que X soit supérieure à son espérance $E(X)$. Que vaut p_3 ?

A) $p_3 = \frac{1}{e}$ **B)** $p_3 = \frac{1}{2}$

C) $p_3 = 1 - \frac{1}{e}$ **D)** $p_3 = e^{-\lambda^2}$

Deuxième partie

Soit n un entier naturel non nul. Pour un jeu de dé, qui se joue en n parties, on utilise un seul dé non pipé à six faces. On suppose que les résultats des parties successives sont indépendants.
Lors d'une partie, le joueur lance le dé.

- S'il obtient un chiffre pair, alors il reçoit autant d'euros que le nombre apparu sur le dé.
- S'il obtient un chiffre impair, alors il perd m euros, m désignant un réel positif.

On note G_n la variable aléatoire correspondant au gain du joueur lors de la n-ième partie. Ce gain est donc positif ou négatif.

On suppose que le joueur décide de faire une seule partie.

II -5- Compléter le tableau donnant la loi de G_1.

II -6- Donner la probabilité P_1 que le joueur ait un gain positif.

II -7- Donner, en fonction de m, la valeur de l'espérance $E(G_1)$. Détailler le calcul.

II -8- Pour quelles valeurs de m a-t-on $E(G_1) \geq 0$?

Dans la question suivante, on suppose que le joueur joue successivement deux parties et que $m = 4$.

II -9- On note $G_T = G_1 + G_2$ la variable aléatoire correspondant au gain total du joueur à l'issue des deux parties. Calculer la probabilité P_2 que le joueur ait un gain total nul. Détailler le calcul.

Dans la suite, n est quelconque.

II -10- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties où le joueur a un gain positif.
Donner la loi de X. Préciser ses paramètres.

II -11- Notons q_n la probabilité que le joueur ait un gain positif à au moins une des n parties.
Donner l'expression de q_n en fonction de n.

II -12- Déterminer le nombre minimal n_0 de parties que le joueur doit faire pour que la probabilité précédente soit strictement supérieure à 0,99. Détailler les calculs.

Mathématiques - EXERCICE III

La première question est indépendante.

III-1- VRAI-FAUX

On considère, dans l'espace, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Pour chacune des assertions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. *Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.*

- **A)** Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, alors elles sont sécantes.
- **B)** Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes, alors elles sont coplanaires.
- **C)** Si $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à toute droite contenue dans $\mathcal{P}$.
- **D)** Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors toute droite de $\mathcal{P}$ est parallèle à toute droite de $\mathcal{P}'$.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A\,(1\,;1\,;1) \qquad B\left(1\,;1\,;\frac{3}{2}\right) \qquad C\,(2\,;1\,;1)$$

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x - y + 2\,z - 3 = 0$.

III-2- Parmi les points A, B et C, lesquels appartiennent au plan $\mathcal{P}$?

III-3- QCM

Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont normaux au plan $\mathcal{P}$?

- **A)** $\overrightarrow{n_1}\,(2\,;0\,;-1)$
- **B)** $\overrightarrow{n_2}\,(-1\,;2\,;-3)$
- **C)** $\overrightarrow{n_3}\,(1\,;-1\,;2)$
- **D)** $\overrightarrow{n_4}\,(-2\,;2\,;-4)$

III-4- Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$.

III-5- Soit K le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées $(x_K\ ;\ y_K\ ;\ z_K)$ du point K. Justifier la réponse.

III-6- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

III-7- Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite (BC).
Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$.

III-8- QCM

Parmi les systèmes paramétriques suivants, lesquels représentent la droite (BC) ?

A) $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 \\ z = 1 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

B) $\begin{cases} x = -2k \\ y = 1 \\ z = 2 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

C) $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = k \\ z = -\frac{1}{2} + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

D) $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 1 + \frac{5}{2}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

III-9- Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
Donner les coordonnées $(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ du point H.

III-10- Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point A et parallèle à $\mathcal{P}$. Justifier la réponse.

III-11- Calculer la distance d entre les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$. Détailler le calcul.

III-12- VRAI-FAUX

Pour chacune des assertions suivantes concernant les positions relatives des droites (BC) et (HK), indiquer si elle est vraie ou fausse. *Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.*

- **A)** Elles sont sécantes
- **B)** Elles sont parallèles
- **C)** Elles sont orthogonales
- **D)** Elles sont coplanaires

Mathématiques - EXERCICE IV

Les trois parties sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel strictement supérieur à 1.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + 2\,i\sqrt{a^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad z_B = 4$$

On définit les points C, D, H par :

- C est le symétrique de A par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$;
- D est le symétrique de A par rapport au point O ;
- H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

On note z_C, z_D et z_H les affixes respectives des points C, D et H.

Première partie

Dans cette partie, on suppose que $a = 2$.

IV-1- Écrire la forme algébrique de z_A . Donner son module $|z_A|$.
Puis écrire la forme exponentielle de z_A .

IV-2- Donner la valeur de z_C sous forme algébrique et exponentielle.

IV-3- QCM
Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond à la forme exponentielle de z_D ?

A) $z_D = 4\,e^{-\frac{i\pi}{3}}$ **B)** $z_D = -4\,e^{\frac{i\pi}{3}}$

C) $z_D = 4\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ **D)** $z_D = -4\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

IV-4- Sur la figure, placer les points A, B, C, D.
Faire apparaître la construction qui vous permet de placer les points correctement.

IV-5- Donner la nature précise du triangle OAB et du quadrilatère $ABCD$.

IV-6- Justifier géométriquement que $z_H = \frac{1}{2} z_A$. En déduire la forme algébrique de z_H.
Placer le point H sur la figure de la question **IV-4-**

IV-7- QCM
Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, du quadrilatère $ABCD$. Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{A}$?

A) $\mathcal{A} = 24\sqrt{3}$ **B)** $\mathcal{A} = 16\sqrt{3}$

C) $\mathcal{A} = 12\sqrt{3}$ **D)** $\mathcal{A} = 8\sqrt{3}$

Dans la suite, a est quelconque

Deuxième partie

IV-8- Notons ℓ_1 et ℓ_2 les longueurs respectives des diagonales $[OB]$ et $[AC]$ du losange $OABC$.
Donner la valeur exacte de ℓ_1. Donner une expression de ℓ_2 en fonction de a.

IV-9- Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère $OABC$ est-il un carré ? Justifier la réponse.

Troisième partie

Soient (E) et (E') les équations d'inconnue complexe z :

$$(E) : \quad z^2 - 4\,z + 4\,a^2 = 0 \qquad\qquad (E') : \quad z^3 - 4\,z^2 + 4\,a^2\,z = 0$$

IV-10- Justifier que l'équation (E) admet deux racines complexes non réelles.

IV-11- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).
Donner les expressions de z_1 et z_2 en fonction de a.

IV-12- En déduire l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions de l'équation (E').

Ne rien inscrire sur cette page

Ne rien inscrire sur cette page