



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

ANNALES CONCOURS ADVANCE
MATHÉMATIQUES

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ contact@pge-pgo.fr | 🌐 pge-pgo.fr

4 mai 2019

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Consignes aux candidats

Durée de l'épreuve : 1h30

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, avec indication de votre nom, prénom, et en cochant les cases de votre identifiant personnel : le numéro QCM.

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
 - Vous cochez la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
 - Vous cochez la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
 - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée. **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**
- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 6 pages numérotées de 1 à 6. Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

Épreuve de mathématiques

Durée : 1 h 30

Questions obligatoires

1.
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
 - b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
 - c. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = 0$.
 - d. Si $2\ln(a) + 1 > 0$ alors $a > \sqrt{e}$.
 - e. Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'origine O .
 Pour tout point M du plan, l'affixe de M est noté Z_M .
 A, B et C désignent trois points du plan distincts de O .
 - a. Si $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2-i\sqrt{6}}}$ alors $|Z| = \frac{1}{2}$ et $\arg(Z) = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$.
 - b. Si $Z = -2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.
 - c. Si les points A et B sont symétriques par rapport à O alors $Z_A = \overline{Z_B}$.
 - d. Si $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C|$ alors ABC est un triangle équilatéral.
 - e. Si $\arg(Z_A) = \pi + \arg(Z_B) [2\pi]$ alors O, A et B sont alignés.

3. f est une fonction définie et dérivable sur un ensemble D .
 - a. Si $D = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.
 - b. Si $D = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = (x^2 - x)e^{1/x}$ alors $f'(x) = e^{1/x} \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x} \right)$.
 - c. Si $D = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - d. $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 + 1} dx = \ln(2)$.
 - e. $\int_0^{\pi/2} \sin(2x + \pi) dx = 0$.

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{1-x}$ et \mathcal{C} la courbe représentant f dans un repère orthonormal. Soit d la droite d'équation $y = ex + 15$ et D la droite d'équation $y = x$.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

c. Pour tout réel x , $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

d. Il existe une tangente T à \mathcal{C} qui est parallèle à la droite d .

e. \mathcal{C} est en dessous de la droite D sur $]-\infty, 0[$.

5. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$, représentée par la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormal.

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$, représentée par la courbe \mathcal{C}' .

a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

b. Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \frac{2 \ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}$.

c. Pour tout réel x strictement positif, $\frac{g(x)}{2} = \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2$.

d. \mathcal{C} admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

e. \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{C}' sur $\left] \frac{1}{e}, +\infty \right[$.

6. Un magasin d'électroménager vend deux modèles de robot au même prix et de marques M_1 et M_2 .

Les deux robots ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi le robot M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs 20 % des clients ayant acheté un robot M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des robots précédemment cités et on choisit un client au hasard.

Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot M_2 de couleur noire est égale à $\frac{6}{25}$.

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot de couleur noire est égale à $\frac{6}{25}$.

c. Le client a choisi un robot de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est égale à $\frac{33}{50}$.

d. La probabilité de l'événement B est égale à 0,5.

e. A et \overline{B} sont indépendants.

Questions à choisir

7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln((1 - e^x)^2)$ et \mathcal{C} la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$.
- L'axe des abscisses est une asymptote de \mathcal{C} en $-\infty$.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 2\ln(1 - e^x)$.
- Pour tout $x \neq 0$, $(f(x) > 0$ si et seulement si $x < 0)$.
- f est décroissante sur $]-\infty, 0[$.

8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

On considère l'algorithme ci-dessous.

N est un entier, U est un réel

$U \leftarrow 1; N \leftarrow 0;$

Tant que $(U \leq 0$ ou $N = 0)$

$U \leftarrow \frac{U}{3} + N - 2$

$N \leftarrow N + 1$

Fin Tant que

Afficher U

- $u_3 = -\frac{14}{27}$.
- L'algorithme affiche la valeur de u_3 .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5 \implies u_n \geq n - 3)$.
- (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_{n+1}) = \ln(v_n) - 1$.

- a. Si pour tout réel x , $f'(x) < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- b. (v_n) est une suite géométrique.
- c. (v_n) est convergente.
- d. La suite (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = (n^2 - 200)\sqrt{n}$ est décroissante.

e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = +\infty$.

10. f est une fonction définie sur \mathbb{R} .

a. Si pour tout réel $x > 1$, $1 + \frac{1}{x} < f(x) < \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b. Si $f(x) = 2x + 3 - \sin(2x)$ alors pour tout réel x , $f(x) \leq 2x + 2$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} = 1$.

e. Si $0 < x < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(1-x)^n(1+x)^n] = +\infty$.

11. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal d'origine O , on considère les points E et F d'affixes respectives $-2 + i$ et $2 + 4i$ et \mathcal{E} l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + 2 - i| = |z - 2 - 4i|$.

Pour tout point M du plan, l'affixe de M est notée z_M .

a. Le point G d'affixe $3 - \frac{3}{2}i$ appartient à \mathcal{E} .

b. \mathcal{E} est le cercle de diamètre $[EF]$.

c. Le triangle OEF est rectangle.

d. Si $z_A = 2 - 3i$, $z_B = -26 + 18i$ et $z_C = -2$ alors A , B et C sont alignés.

e. Si $z_A = 3e^{2i\pi/3}$ et $z_B = 2e^{-5i\pi/6}$ alors le triangle OAB est rectangle.

12. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants définis par leurs coordonnées : $A(1; -1; 2)$, $B(3; 3; 8)$, $C(-3; 5; 4)$ et $D(1; 2; 3)$.

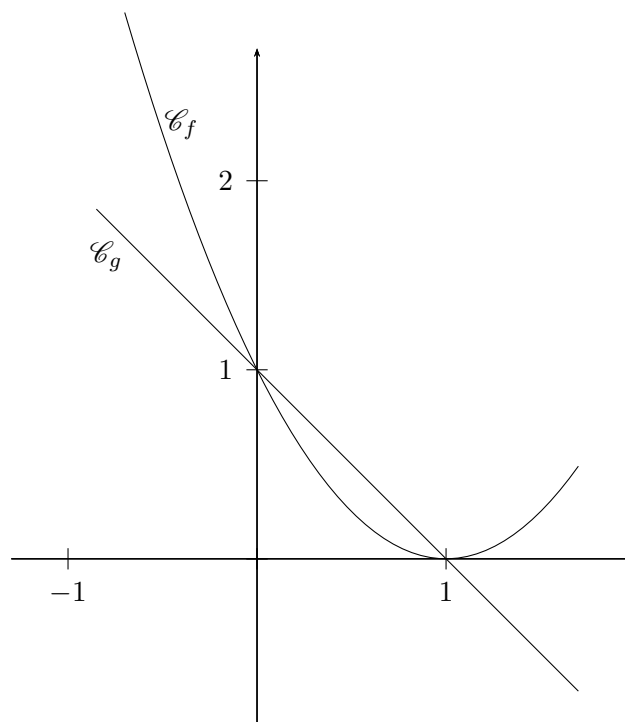
On note d la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On note d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

On note P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

- Le point C appartient à la droite d .
- Les droites d et d' sont parallèles.
- Le plan P contient la droite d et est orthogonal à la droite d' .
- Le triangle BCD est rectangle.
- On note P' le plan contenant la droite d' et le point A . Un vecteur normal à ce plan est : $\vec{n}(3; -1; 2)$.

13. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -x+1$ représentées graphiquement par leurs courbes respectives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- a. L'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g (pour $x \in [0, 1]$) est égale à $\frac{1}{6}$.
- b. $\int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3}$.
- c. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$.
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
- e. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) < \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx < \ln(2)$.
14. Le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,7.
- Marc se rend à son travail à pied ou en bus. Dans la ville où il habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Marc se rend en bus à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, il se rend à pied à son travail dans 60 % des cas.
- a. La probabilité qu'un client attende moins de 5 minutes à ce guichet est égale à $\frac{e^{3,5} - 1}{e^{3,5}}$.
- b. Sachant qu'un client attend depuis 5 minutes, la probabilité qu'il attende au total plus de 10 minutes à ce guichet est égale à $e^{-3,5}$.
- c. Marc prend le bus un jour sur deux.
- d. Soient A et B deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$.
- Alors la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\frac{14}{89}$.
- e. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et dont la loi de probabilité admet comme densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^3}$.
- Alors $P(1 \leq X \leq 4) = \frac{15}{16}$.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL

DE L'ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

(V)rai ou (F)aux

N°	A	B	C	D	E
1	V	V	F	F	F
2	V	F	F	F	V
3	V	V	F	F	F
4	F	V	V	V	V
5	F	V	F	V	F
6	V	F	F	V	V
7	F	V	F	F	V
8	V	F	V	F	V
9	F	V	V	F	F
10	V	F	V	F	F
11	V	F	V	V	V
12	F	F	F	V	V
13	V	F	V	V	V
14	V	V	V	F	V