



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

ANNALES CONCOURS ADVANCE
MATHÉMATIQUES

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ contact@pge-pgo.fr | 🌐 pge-pgo.fr

5 mai 2018

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Consignes aux candidats

Durée de l'épreuve : 1h30

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, avec indication de votre nom, prénom, et en cochant les cases de votre identifiant personnel : le numéro QCM.

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
 - Vous cochez la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
 - Vous cochez la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
 - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée. **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**
- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 4 pages numérotées de 1 à 4. Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

Questions obligatoires

1. (A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$
 (B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{x^2} = -\infty$
 (D) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$
 (E) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$

2. (A) Si $f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$ alors $f'(x) = -12x^3 + 4x + 1$
 (B) Si $f(x) = 2x^3 + x + \frac{4}{x^2}$ alors $f'(x) = 6x^2 + 1 + \frac{4}{x^3}$
 (C) Si $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ alors $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$
 (D) Si $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$ alors $f'(x) = \frac{1 - x \ln(x)}{xe^x}$
 (E) Si $f(x) = \cos^2(x)$ alors $f'(x) = -\sin(2x)$

3. Soit f la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = x - \ln(x^2)$. On donne $\ln(2) \approx 0,69$.
 (A) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$
 (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 (C) f est croissante sur $]0, +\infty[$
 (D) $f'(1) = 0$
 (E) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$

4. Soit f la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = e^{x+\ln(x)}$.

- (A) $f(1) = e$
- (B) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = e^x + x$
- (C) f est croissante sur $]0, +\infty[$
- (D) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = (x + 1)e^x$
- (E) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

5. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$.

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- (C) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$
- (D) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{2}{(e^x - 1)^2}$
- (E) f est croissante sur $]0, +\infty[$

6. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On considère que les 3 énoncés suivants sont vrais :

$$P_1 : \text{Si } f(0) = 1 \text{ et } f(1) \neq 2 \text{ alors } f(2) = 3$$

$$P_2 : \text{Si } f(2) = 3 \text{ ou } f(3) \neq 4 \text{ alors } f(0) \neq 1$$

$$P_3 : \text{Si } f(1) = 2 \text{ alors } f(3) \neq 4$$

- (A) P_2 est équivalent à : Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$ ou $f(3) = 4$
- (B) Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$
- (C) On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 2$
- (D) On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$
- (E) On peut affirmer que $f(0) \neq 1$

Questions à choisir

7. Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k$.

- (A) Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n q^k = S_n - 1$
- (B) Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n q^k = qS_{n-1}$
- (C) Si $q = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n$
- (D) Si $q = -1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$
- (E) Si $q \in]-1, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$

8. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(A) (u_n) est une suite géométrique

(B) (u_n) est croissante

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

(D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(E) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

9. (A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 1$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) dx = \frac{1}{3}$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = 1 - \sqrt{2}$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) dx = 1$

(E) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = 1$

10. Pour un nombre complexe z , $\operatorname{Re}(z)$ désigne sa partie réelle, $\operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire.
Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe : $z + |z| = 1 + 2i$.

(A) Si $z \in S$ alors $z \notin \mathbb{R}$

(B) Si $z \in S$ alors $\operatorname{Im}(z) = 2$

(C) Si $z \in S$ alors $|z| \geq 2$

(D) Si $z \in S$ alors $\operatorname{Re}(z) \geq -1$

(E) $S = \{-1 + 2i\}$

11. (A) $\frac{1 + 2i}{2 + i}$ est imaginaire pur

(B) $\frac{1 + 2i}{2 - i}$ est imaginaire pur

(C) $\frac{1 - 2i}{2 + i}$ est réel

(D) $\left| \frac{1 + 2i}{2 + i} \right| = 1$

(E) $\left| \frac{1 + 2i}{2 - i} \right| = 1$

12. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $I(3, -2, 2)$, $J(6, 1, 5)$, $K(6, -2, -1)$ et $L(0, 4, -1)$.

- (A) $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = 0$
- (B) Le triangle (IJK) est rectangle
- (C) $KL^2 = KI^2 + IL^2$
- (D) Le triangle (IKL) est rectangle
- (E) Le triangle (IJL) est rectangle

13. La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note f la fonction densité associée à T et on rappelle que pour tout $t \geq 0$ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

- (A) $P(T \leq 5) = \lambda(1 - e^{-5\lambda})$
- (B) Si $P(T \leq 5) = 0,9$ alors $\lambda = \frac{\ln(10)}{5}$
- (C) La probabilité que le composant ne fonctionne plus au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $P(2 \leq T \leq 5)$
- (D) La probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $\frac{P(T \geq 5)}{P(T \geq 2)}$
- (E) Si l'espérance de T est 5 alors $\lambda = 5$

14. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$, qui a 3 racines réelles dans $]-2, 2[$ dont une seule dans $]1, 2[$.

On note α la racine dans $]1, 2[$. Pour avoir une valeur approchée de α on utilise l'algorithme suivant :

Entrées : Donner les valeurs de a, b, N

Variables : x réel, i entier

Traitement : Pour i allant de 1 à N

$$x \leftarrow a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$$

Si $f(a)f(x) > 0$

$$a \leftarrow x$$

Sinon

$$b \leftarrow x$$

Fin Si

Fin Pour

Sortie : Afficher x

- (A) L'algorithme est basé sur le théorème des valeurs intermédiaires
- (B) Dans l'algorithme, x est l'abscisse du point intersection d'une droite avec l'axe des abscisses
- (C) Pour obtenir une valeur approchée de α , on peut donner en entrées pour a et b : $a = 0$ et $b = 2$
- (D) Les entrées $(a = 1, b = 2, N = 10)$ et $(a = 2, b = 1, N = 10)$ donneront la même sortie
- (E) On peut remplacer la boucle « Pour i allant de 1 à N » par une boucle conditionnelle « Tant que $(b-a) > 10^{-N}$ »

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	F	V	V	V	F
2	F	F	V	V	V
3	V	V	F	F	V
4	V	F	V	V	F
5	V	F	V	F	V
6	F	V	F	F	V
7	V	V	F	F	V
8	F	F	V	F	V
9	F	V	F	V	F
10	V	V	V	F	F
11	F	V	F	V	V
12	V	V	V	V	V
13	F	V	F	V	F
14	V	V	F	V	V