PGE ■ PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

ANNALES CONCOURS

GEIPI POLYTECH

MATHÉMATIQUES

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

0187660050 | contact@pge-pgo.fr | pge-pgo.fr

Ne rien inscrire dans ce cadre

CONCOURS Geipi Polytech

NOM :	PRÉNOM :
Centre d'écrit :	

N° Inscription :

Ne rien inscrire ci-dessous

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Série S

Mercredi 3 mai 2017

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Les réponses aux questions seront à écrire au stylo et uniquement dans les cadres des documents réponses prévues à cet effet.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.

Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

1	
2	
3	
4	

TOTAL

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés.

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \geq 0, \qquad f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$.

I-A-1- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-A-2- f' désigne la dérivée de f.

Pour tout $x \geq 0$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

Déterminer l'expression de $h(x)$. Détailler le calcul.

I-A-3- Dresser le tableau des variations de f.

I-A-4- Soient B, C et D les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 5 et 10.
On note y_B, y_C et y_D leurs ordonnées.
Donner la valeur de y_B et une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de y_C et y_D.

Partie B

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad g(x) = -1 + \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan $\mathcal{P}$.

I-B-1- Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) - g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{x+1}$,
où a et b sont des réels à déterminer.

I-B-2-a- Pour $x > 0$, quel est le signe de $f(x) - g(x)$? Justifier la réponse.

I-B-2-b- En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-B-3- Soit $x > 0$. On considère les points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$.

I-B-3-a- Exprimer la longueur MN en fonction de x.

I-B-3-b- Donner la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$.

I-B-4- Sur la figure est tracée la courbe $\mathcal{C}_g$. Placer les points B, C et D. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.
Puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant les résultats des questions **I-B-2-b-** et **I-B-3-b**.

Partie C

On considère la fonction H définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad H(x) = (x+2)\ln(x+1) - x\ln x.$$

I-C-1- Montrer que H est une primitive de $f - g$ sur $]0; +\infty[$.

I-C-2- Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathcal{A}$ son aire, exprimée en unités d'aires.

I-C-2-a- Hachurer $\mathcal{D}$ sur la figure de la question **I-B-4-**.

I-C-2-b- Calculer $\mathcal{A}$. Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ où α et β sont des entiers relatifs à déterminer.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$. En effet :

I-A-2- Pour tout $x \geq 0$, $h(x) =$. En effet :

I-A-3-

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

I-A-4- $y_B =$

$y_C \approx$

$y_D \approx$

I-B-1- $a =$ $\qquad$ $b =$. En effet :

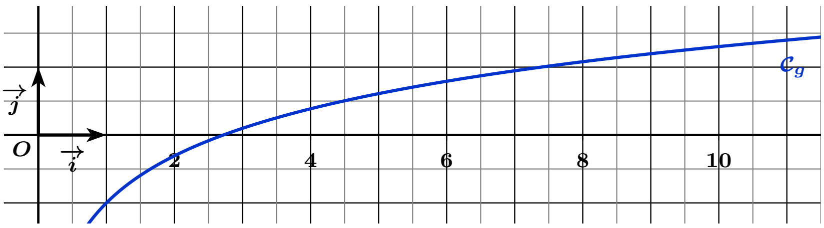
I-B-2-a- Pour tout $x > 0$, $f(x) - g(x)$. En effet :

I-B-2-b- Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$:

I-B-3-a- $MN =$

I-B-3-b- $\lim_{x\to+\infty} MN =$

I-B-4-



I-C-1- H est une primitive de $f - g$ sur $]0; +\infty[$. En effet :

I-C-2-a- Utiliser la figure de la question **I-B-4-**

I-C-2-b- $\mathcal{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ avec $\alpha =$ $\qquad$ et $\beta =$. En effet :

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5.

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie A

II-A-1- Donner l'ensemble $\boldsymbol{F_1}$ des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ d'inconnue réelle $\boldsymbol{x}$:
$(\boldsymbol{E_1})$ $\quad \boldsymbol{4x^2 - 4x + 1 = 0}$.

II-A-2- En déduire l'ensemble $\boldsymbol{F_2}$ des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$ d'inconnue réelle $\boldsymbol{\lambda}$:
$(\boldsymbol{E_2})$ $\quad \boldsymbol{4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0}$.
Justifier la réponse.

Partie B

A une sortie d'autoroute, il y a une seule barrière de péage et une étude a montré que le temps d'attente d'un véhicule arrivant à la barrière avant le franchissement du péage, exprimé en minutes, peut être représenté par une variable aléatoire $\boldsymbol{T}$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$, avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$.

L'étude a montré par ailleurs que la probabilité que le temps d'attente d'un véhicule soit compris entre une et deux minutes est égale à $\frac{1}{4}$.

II-B-1- On rappelle que, pour tout $\boldsymbol{t \geq 0}$, la probabilité $\boldsymbol{P(T \leq t)}$ que l'attente d'un véhicule dure moins de $\boldsymbol{t}$ minutes est donnée par : $\boldsymbol{P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$.

II-B-1-a Ecrire $\boldsymbol{P(1 \leq T \leq 2)}$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$.

II-B-1-b En utilisant la question **II-A-2-**, montrer que $\boldsymbol{\lambda = \ln 2}$.

On a donc : $\quad$ pour tout $\boldsymbol{t \geq 0}$, $\quad \boldsymbol{P(T \leq t) = 1 - e^{-(\ln 2)t}}$.

II-B-2- Un véhicule arrive au péage.

II-B-2-a- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ qu'il attende au plus une minute. Détailler le calcul.

II-B-2-b- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ qu'il attende au moins deux minutes. Détailler le calcul.

II-B-2-c- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ qu'il attende au moins trois minutes, sachant qu'il a attendu au moins deux minutes. Justifier soigneusement la réponse.

Partie C

Le trafic augmentant, la société d'autoroute a installé une deuxième barrière de péage.

Le passage d'un véhicule au péage sera dit "**rapide**" lorsque son temps d'attente est inférieur ou égal à une minute et "**lent**" dans le cas contraire.

La probabilité que le véhicule choisisse la **première barrière** est égale à $\frac{2}{3}$ et, dans ce cas, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{1}{2}$. Lorsque le véhicule choisit la **deuxième barrière**, plus moderne, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{3}{5}$.

Un véhicule arrive au péage. On considère les événements :

$\boldsymbol{B_1}$: "le véhicule choisit la **première barrière**"
$\boldsymbol{B_2}$: "le véhicule choisit la **deuxième barrière**"
$\boldsymbol{R}$: "le passage au péage est **rapide**"
$\boldsymbol{L}$: "le passage au péage est **lent**"

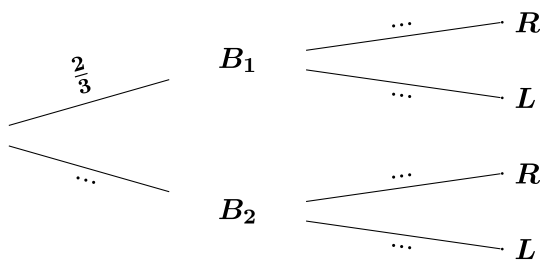
II-C-1- Compléter l'arbre ci-contre avec les probabilités correspondantes.

II-C-2- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_4}$ que le passage du véhicule au péage soit **rapide**. Détailler le calcul.

II-C-3- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_5}$ que le véhicule ait choisi la **deuxième barrière**, sachant que son passage a été **lent**. Justifier soigneusement le résultat.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$\boldsymbol{F_1 =}$
II-A-2-	$\boldsymbol{F_2 =}$. En effet :
II-B-1-a-	$\boldsymbol{P(1 \leq T \leq 2) =}$
II-B-1-b-	$\boldsymbol{\lambda = \ln 2}$. En effet :
II-B-2-a-	$\boldsymbol{P_1 =}$. En effet :
II-B-2-b-	$\boldsymbol{P_2 =}$. En effet :
II-B-2-c-	$\boldsymbol{P_3 =}$. En effet :
II-C-1-	
II-C-2-	$\boldsymbol{P_4 =}$. En effet :
II-C-3-	$\boldsymbol{P_5 =}$. En effet :

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

III-A-1- On considère la suite géométrique $(v_n)_{n \geq 1}$ de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1$.

III-A-1-a- Donner les valeurs exactes de v_2 et v_3.

III-A-1-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de v_n en fonction de n.

III-A-2- On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \ldots + v_n$.

III-A-2-a- Donner les valeurs exactes de A_1, A_2 et A_3.

III-A-2-b- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_n = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

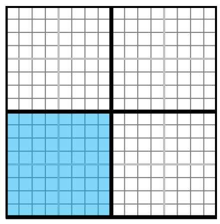
III-A-2-c- La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} A_n$. Justifier la réponse.

III-A-2-d- Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 3$. On le notera n_0.
Justifier soigneusement la réponse.

Partie B

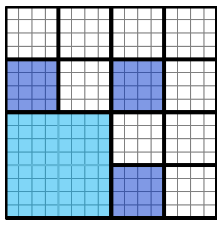
On effectue le coloriage d'un carré de côté **2** unités de longueur avec les consignes suivantes :

Etape 1 : partager le carré initial en quatre carrés identiques de côté de longueur c_1 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.



Etape 1

Etape 2 : pour chacun des carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_2 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.



Etape 2

On poursuit le coloriage du carré selon le même procédé à chaque étape.
Autrement dit, pour tout $n \geq 1$:

Etape n : pour chacun des k_n carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_n et colorier le carré situé en bas à gauche. On colorie k_n carrés à l'étape n.

On remarque que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

III-B-1- Faire le coloriage de l'étape **3**.

III-B-2-a- Donner la valeur de k_3.

III-B-2-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_{n+1} en fonction de k_n.

III-B-2-c- En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_n en fonction de n.

III-B-3-a- Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.

III-B-3-b- Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $c_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

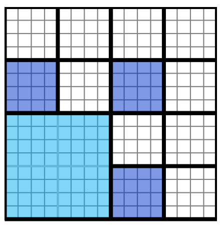
III-B-4- Justifier que l'aire, en unités d'aire (**u.a.**), de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale au terme v_n de la suite définie dans la question **III-A-1-**.

III-B-5-a- Que vaut l'aire, en **u.a.**, de la surface totale coloriée à l'issue de l'étape n ?

III-B-5-b- Déterminer le nombre d'étapes minimal nécessaire pour colorier au moins les trois quarts du carré initial. Justifier la réponse.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-a-	$v_2 =$ $v_3 =$
III-A-1-b-	Pour tout $n \geq 1$, $v_n =$
III-A-2-a-	$A_1 =$ $A_2 =$ $A_3 =$
III-A-2-b-	Soit $n \geq 1$. Détail du calcul de A_n :
III-A-2-c-	$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n =$. En effet :
III-A-2-d-	$n_0 =$. En effet :
III-B-1-	Étape 3 
III-B-2-a-	$k_3 =$
III-B-2-b-	Pour tout $n \geq 1$, $k_{n+1} =$
III-B-2-c-	Pour tout $n \geq 1$, $k_n =$
III-B-3-a-	$c_1 =$ $c_2 =$ $c_3 =$
III-B-3-b-	Pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. En effet :
III-B-4-	L'aire, en **u.a.**, de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale à v_n. En effet :
III-B-5-a	L'aire, en **u.a.**, de la surface **totale** coloriée à l'issue de l'étape n, vaut :
III-B-5-b-	On a colorié au moins les trois quarts du carré initial à l'issue de l'étape .... En effet :

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $A(0;4;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(1;1;-5)$, $D(1;0;-4)$, $E(-1;2;-3)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+k \\ y & = & k \\ z & = & -5+k \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{R}\,;$$

- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x+2z+7=0$.

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-b- Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-c- Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-2- Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+d=0$, où d désigne un réel.

IV-2-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathcal{P}_2$.

IV-2-b- Soit J le point de coordonnées $(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-5)$.
Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.

IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

IV-3-b- Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[CD]$.

IV-3-c- Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonale à la droite (CD).
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.

IV-4- Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.

IV-4-a- Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.

IV-4-b- Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.

IV-5-a- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

IV-5-b- Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.

IV-5-c- On en déduit que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.

IV-5-d- Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\overrightarrow{n_1}$ (; ;)		
IV-1-b-	I appartient au plan $\mathcal{P}_1$. En effet :		
IV-1-c-	La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$. En effet :		
IV-2-a-	$\overrightarrow{n_2}$ (; ;)		
IV-2-b-	$d =$. En effet :		
IV-3-a-	$\overrightarrow{CD}$ (; ;)	**IV-3-b-**	K (; ;)
IV-3-c-	Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$: . En effet :		
IV-4-a-	Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{D}$. En effet :		
IV-4-b-	La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E. En effet :		
IV-5-a-	$\overrightarrow{EA}$ (; ;) $\overrightarrow{EB}$ (; ;) $\overrightarrow{EC}$ (; ;) $\overrightarrow{ED}$ (; ;)		
IV-5-b-	$EA =$ $EB =$ $EC =$ $ED =$		
IV-5-c-	La sphère $\mathcal{S}$ a pour centre .... et pour rayon $R =$................ . En effet :		
IV-5-d-	Equation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$:		

Ne rien inscrire sur cette page

Ne rien inscrire sur cette page

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés.

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \geq 0, \qquad f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$.

I-A-1- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-A-2- f' désigne la dérivée de f.
Pour tout $x \geq 0$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.
Déterminer l'expression de $h(x)$. Détailler le calcul.

I-A-3- Dresser le tableau des variations de f.

I-A-4- Soient B, C et D les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 5 et 10.
On note y_B, y_C et y_D leurs ordonnées.
Donner la valeur de y_B et une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de y_C et y_D.

Partie B

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad g(x) = -1 + \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan $\mathcal{P}$.

I-B-1- Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) - g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{x+1}$,
où a et b sont des réels à déterminer.

I-B-2-a- Pour $x > 0$, quel est le signe de $f(x) - g(x)$? Justifier la réponse.

I-B-2-b- En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-B-3- Soit $x > 0$. On considère les points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$.

I-B-3-a- Exprimer la longueur MN en fonction de x.

I-B-3-b- Donner la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$.

I-B-4- Sur la figure est tracée la courbe $\mathcal{C}_g$. Placer les points B, C et D. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.
Puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant les résultats des questions **I-B-2-b-** et **I-B-3-b**.

Partie C

On considère la fonction H définie par :

$$\text{pour tout réel } x > 0, \qquad H(x) = (x+2)\ln(x+1) - x\ln x.$$

I-C-1- Montrer que H est une primitive de $f - g$ sur $]0; +\infty[$.

I-C-2- Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathcal{A}$ son aire, exprimée en unités d'aires.

I-C-2-a- Hachurer $\mathcal{D}$ sur la figure de la question **I-B-4-**.

I-C-2-b- Calculer $\mathcal{A}$. Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ où α et β sont des entiers relatifs à déterminer.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En effet :

$\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

I-A-2- Pour tout $x \geq 0$, $h(x) = x$. En effet :

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

I-A-3-

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

I-A-4-

$y_B = 0$

$y_C \approx 1$

$y_D \approx 1,5$

I-B-1- $a = 1$ $b = 1$ en effet :

Par définition de $f(x)$ et $g(x)$, on a : $f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} + 1 - \ln x$

Alors $f(x) - g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{-x+x+1}{x+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$

I-B-2-a- Pour tout $x > 0$, $f(x) - g(x) > 0$. En effet :

$\frac{1}{x+1} > 0$ et

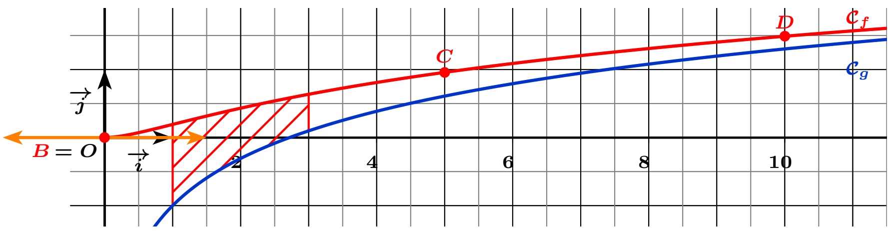
$1+\frac{1}{x} > 1$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln 1$ (car $\ln$ est strictement croissante) avec $\ln 1 = 0$.

I-B-2-b- Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

I-B-3-a- $MN = f(x) - g(x)$

I-B-3-b- $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$

I-B-4-



I-C-1- H est une primitive de $f - g$ sur $]0;+\infty[$. En effet : $\forall x > 0$, $H'(x) = f(x) - g(x)$

car
$$\begin{aligned} H'(x) &= 1\times\ln(x+1) + (x+2)\times\frac{1}{x+1} - \left(1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x+2}{x+1} - 1 \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

I-C-2-a- Utiliser la figure de la question **I-B-4-**

I-C-2-b- $\mathcal{A} = \alpha\ln 2 + \beta\ln 3$ avec $\alpha = 7$ et $\beta = -3$. En effet :

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx = [H(x)]_1^3 = H(3) - H(1)$$

avec $H(3) = 5\ln 4 - 3\ln 3 = 10\ln 2 - 3\ln 3$ et $H(1) = 3\ln 2 - 1\ln 1 = 3\ln 2$

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5.

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie A

II-A-1- Donner l'ensemble $\boldsymbol{F_1}$ des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ d'inconnue réelle $\boldsymbol{x}$:
$(\boldsymbol{E_1})$ $\quad \boldsymbol{4x^2 - 4x + 1 = 0}$.

II-A-2- En déduire l'ensemble $\boldsymbol{F_2}$ des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$ d'inconnue réelle $\boldsymbol{\lambda}$:
$(\boldsymbol{E_2})$ $\quad \boldsymbol{4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0}$.
Justifier la réponse.

Partie B

A une sortie d'autoroute, il y a une seule barrière de péage et une étude a montré que le temps d'attente d'un véhicule arrivant à la barrière avant le franchissement du péage, exprimé en minutes, peut être représenté par une variable aléatoire $\boldsymbol{T}$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$, avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$.

L'étude a montré par ailleurs que la probabilité que le temps d'attente d'un véhicule soit compris entre une et deux minutes est égale à $\frac{1}{4}$.

II-B-1- On rappelle que, pour tout $\boldsymbol{t \geq 0}$, la probabilité $\boldsymbol{P(T \leq t)}$ que l'attente d'un véhicule dure moins de $\boldsymbol{t}$ minutes est donnée par : $\boldsymbol{P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$.

II-B-1-a Ecrire $\boldsymbol{P(1 \leq T \leq 2)}$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$.

II-B-1-b En utilisant la question **II-A-2-**, montrer que $\boldsymbol{\lambda = \ln 2}$.

On a donc : $\quad$ pour tout $\boldsymbol{t \geq 0}$, $\quad \boldsymbol{P(T \leq t) = 1 - e^{-(\ln 2)t}}$.

II-B-2- Un véhicule arrive au péage.

II-B-2-a- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ qu'il attende au plus une minute. Détailler le calcul.

II-B-2-b- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ qu'il attende au moins deux minutes. Détailler le calcul.

II-B-2-c- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ qu'il attende au moins trois minutes, sachant qu'il a attendu au moins deux minutes. Justifier soigneusement la réponse.

Partie C

Le trafic augmentant, la société d'autoroute a installé une deuxième barrière de péage.

Le passage d'un véhicule au péage sera dit "**rapide**" lorsque son temps d'attente est inférieur ou égal à une minute et "**lent**" dans le cas contraire.

La probabilité que le véhicule choisisse la **première barrière** est égale à $\frac{2}{3}$ et, dans ce cas, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{1}{2}$. Lorsque le véhicule choisit la **deuxième barrière**, plus moderne, la probabilité que son passage soit **rapide** est égale à $\frac{3}{5}$.

Un véhicule arrive au péage. On considère les événements :

$\boldsymbol{B_1}$: "le véhicule choisit la **première barrière**" $\qquad$ $\boldsymbol{R}$: "le passage au péage est **rapide**"
$\boldsymbol{B_2}$: "le véhicule choisit la **deuxième barrière**" $\qquad$ $\boldsymbol{L}$: "le passage au péage est **lent**"

II-C-1- Compléter l'arbre ci-contre avec les probabilités correspondantes.

II-C-2- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_4}$ que le passage du véhicule au péage soit **rapide**.
Détailler le calcul.

II-C-3- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_5}$ que le véhicule ait choisi la **deuxième barrière**, sachant que son passage a été **lent**. Justifier soigneusement le résultat.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1- $F_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

II-A-2- $F_2 = \{\ln 2\}$. En effet :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}_2) \quad &\Leftrightarrow \quad 4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(e^{-\lambda})^2 - 4e^{-\lambda} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\ln\tfrac{1}{2} = \ln 2
\end{aligned}
$$

II-B-1-a- $P(1 \leq T \leq 2) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$

II-B-1-b- $\lambda = \ln 2$. En effet :

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq T \leq 2) = \tfrac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \tfrac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 4e^{-2\lambda} - 4e^{-\lambda} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = \ln 2
\end{aligned}
$$

II-B-2-a- $P_1 = \dfrac{1}{2}$. En effet :

$P_1 = P(T \leq 1) = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

II-B-2-b- $P_2 = \dfrac{1}{4}$. En effet : $P_2 = P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - P(T \leq 2)$

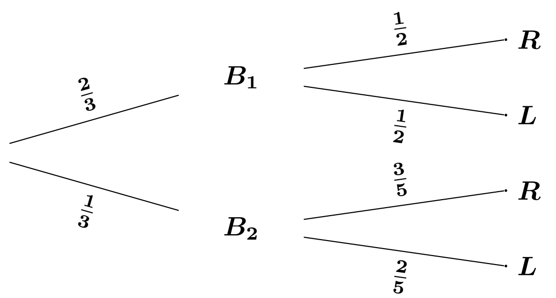
Alors $P_2 = 1 - (1 - e^{-2\ln 2}) = e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}$

II-B-2-c- $P_3 = \dfrac{1}{2}$. En effet : la loi exponentielle étant une loi sans mémoire, on a :

$P_3 = P_{T\geq 2}(T \geq 3) = P(T \geq 1)$

D'où $P_3 = 1 - P(T < 1) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

II-C-1-



II-C-2- $P_4 = \dfrac{8}{15}$. En effet :

$P_4 = P(R) = P_{B_1}(R) \times P(B_1) + P_{B_2}(R) \times P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

II-C-3- $P_5 = \dfrac{2}{7}$. En effet :

$$P_5 = P_L(B_2) = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(L)} = \frac{P_{B_2}(L) \times P(B_2)}{1 - P(R)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$$

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

III-A-1- On considère la suite géométrique $(v_n)_{n\geq 1}$ de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1$.

III-A-1-a- Donner les valeurs exactes de v_2 et v_3.

III-A-1-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de v_n en fonction de n.

III-A-2- On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \ldots + v_n$.

III-A-2-a- Donner les valeurs exactes de A_1, A_2 et A_3.

III-A-2-b- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_n = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

III-A-2-c- La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A_n$. Justifier la réponse.

III-A-2-d- Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 3$. On le notera n_0.
Justifier soigneusement la réponse.

Partie B

On effectue le coloriage d'un carré de côté **2** unités de longueur avec les consignes suivantes :

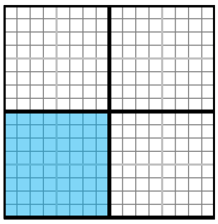
Etape 1 : partager le carré initial en quatre carrés identiques de côté de longueur c_1 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

Etape 2 : pour chacun des carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_2 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

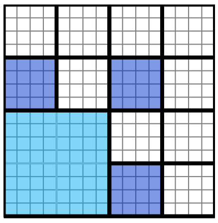
On poursuit le coloriage du carré selon le même procédé à chaque étape.
Autrement dit, pour tout $n \geq 1$:

Etape n : pour chacun des k_n carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_n et colorier le carré situé en bas à gauche. On colorie k_n carrés à l'étape n.

On remarque que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.



Etape 1



Etape 2

III-B-1- Faire le coloriage de l'étape **3**.

III-B-2-a- Donner la valeur de k_3.

III-B-2-b- Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_{n+1} en fonction de k_n.

III-B-2-c- En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_n en fonction de n.

III-B-3-a- Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.

III-B-3-b- Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

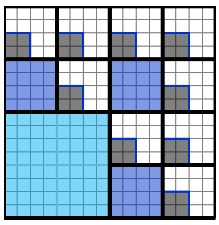
III-B-4- Justifier que l'aire, en unités d'aire (**u.a.**), de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale au terme v_n de la suite définie dans la question **III-A-1-**.

III-B-5-a- Que vaut l'aire, en **u.a.**, de la surface totale coloriée à l'issue de l'étape n ?

III-B-5-b- Déterminer le nombre d'étapes minimal nécessaire pour colorier au moins les trois quarts du carré initial. Justifier la réponse.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-a-	$v_2 = qv_1 = \frac{3}{4}$ $v_3 = qv_2 = \frac{9}{16}$
III-A-1-b-	Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
III-A-2-a-	$A_1 = 1$ $A_2 = \frac{7}{4}$ $A_3 = \frac{37}{16}$
III-A-2-b-	Soit $n \geq 1$. Détail du calcul de A_n : $A_n = v_1 + \ldots + v_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$
III-A-2-c-	$(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 4$. En effet : Comme $\left\|\frac{3}{4}\right\| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 4(1-0) = 4$.
III-A-2-d-	$n_0 = 5$. En effet : $A_n \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ (car $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$). De plus $\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 4,81$
III-B-1-	Étape 3 
III-B-2-a-	$k_3 = 9$
III-B-2-b-	Pour tout $n \geq 1$, $k_{n+1} = 3k_n$
III-B-2-c-	Pour tout $n \geq 1$, $k_n = 3^{n-1}$
III-B-3-a-	$c_1 = 1$ $c_2 = \frac{1}{2}$ $c_3 = \frac{1}{4}$
III-B-3-b-	Pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. En effet : $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $c_1 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.
III-B-4-	L'aire, en **u.a.**, de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale à v_n En effet : elle vaut $k_n \times (c_n)^2 = 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = v_n$
III-B-5-a	L'aire, en **u.a.**, de la surface **totale** coloriée à l'issue de l'étape n, vaut : $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = A_n$
III-B-5-b-	On a colorié au moins les trois quarts du carré initial à l'issue de l'étape $n_0 = 5$ En effet : l'aire du carré initial vaut 4. Donc $A_n \geq \frac{3}{4} \times 4 \Leftrightarrow A_n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq n_0$.

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $A(0; 4; -1)$, $B(-2; 4; -5)$, $C(1; 1; -5)$, $D(1; 0; -4)$, $E(-1; 2; -3)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+k \\ y & = & k \\ z & = & -5+k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R} ;$$

- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x + 2z + 7 = 0$.

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-b- Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-1-c- Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.

IV-2- Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x - y + d = 0$, où d désigne un réel.

IV-2-a- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathcal{P}_2$.

IV-2-b- Soit J le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -5)$.
Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.

IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

IV-3-b- Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[CD]$.

IV-3-c- Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonale à la droite (CD).
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.

IV-4- Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.

IV-4-a- Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.

IV-4-b- Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.

IV-5-a- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

IV-5-b- Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.

IV-5-c- On en déduit que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.

IV-5-d- Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\overrightarrow{n_1}\quad (\,1\,;\,0\,;\,2\,)$
IV-1-b-	I appartient au plan $\mathcal{P}_1$. En effet : Les coordonnées de $I(-1\,;4\,;-3\,)$ vérifient l'équation de $P_1 : -1+2\times(-3)+7=0$.
IV-1-c-	La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$. En effet : Son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;-4\,)$ vérifie $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{n_1}$.
IV-2-a-	$\overrightarrow{n_2}\quad (\,1\,;-1\,;0)$
IV-2-b-	$d=3$. En effet : les coordonnées de $J\ (-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\,;-5\,)$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}_2$: $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+d=0$ soit $-3+d=0$.
IV-3-a-	$\overrightarrow{CD}\quad (\,0\,;-1\,;1\,)$ **IV-3-b-** $K\quad (\,1\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{9}{2}\,)$
IV-3-c-	Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3 : -y+z+5=0$. En effet : P_3 ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{CD}\quad (\,0\,;-1\,;1\,)$, une équation cartésienne de P_3 est de la forme $-y+z+d=0$. Les coordonnées de $K\quad (\,1\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{9}{2}\,)$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}_3 : -\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+d=0$ soit $-5+d=0$.
IV-4-a-	Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et $\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\mathcal{D}$. En effet : Les plans sont sécants car leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{n_2}\ (\,1\,;-1\,;0\,)$ et $\overrightarrow{CD}\ (\,0\,;-1\,;1\,)$ ne sont pas colinéaires. De plus, tout point de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ car : Pour tout $k\in\mathbb{R}$, $-3+k-k+3=0$ et $-k-5+k+5=0$
IV-4-b-	La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E. En effet : Soit $M(x;y;z)$. $M\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow x+2z+7=0$ et il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x+2z+7=0\\ x=-3+k\\ y=k\\ z=-5+k\end{array}\right.$ Ce qui donne $-3+k+2(-5+k)+7=0$ soit $3k-6=0$ et donc $k=2$. Alors $x=-1\,;y=2\,;z=-3$. D'où $M=E$.
IV-5-a-	$\overrightarrow{EA}\quad (\,1\,;2\,;2\,)$ $\overrightarrow{EB}\quad (\,-1\,;2\,;-2\,)$ $\overrightarrow{EC}\quad (\,2\,;-1\,;-2\,)$ $\overrightarrow{ED}\quad (\,2\,;-2\,;-1\,)$
IV-5-b-	$EA=3$ $EB=3$ $EC=3$ $ED=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$
IV-5-c-	La sphère $\mathcal{S}$ a pour centre E et pour rayon $R=3$. En effet : $EA=EB=EC=ED=3$
IV-5-d-	Equation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$