



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES  
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

---

**SUJET OFFICIEL**

---

***ANNALES CONCOURS ADVANCE***  
**MATHÉMATIQUES**

---

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ [contact@pge-pgo.fr](mailto:contact@pge-pgo.fr) | 🌐 [pge-pgo.fr](http://pge-pgo.fr)

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

### Questions obligatoires

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
  - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 2$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$
  - $\lim_{z \rightarrow 1} f(z-1) = 1$
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
  - $\lim_{u \rightarrow 3} f(u^2 - 2u - 3) = 0$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ 
  - $e^{x+2} = e^x + e^2$
  - $e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0$
  - $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$
  - Si  $x > 0$ ,  $e^{x \ln(x)} = x^x$
  - Si  $x < 0$ ,  $e^{1-x} - e^{-x} < 0$
- Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  définie par  $f(x) = x \ln(x) - x$ .
  - $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
  - Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \ln(x)$
  - $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$
  - Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \geq 0$
- Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x - e^{-x}$ .
  - $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
  - $f(1) > 0$
  - Il existe  $x \in ]0, 1[$  tel que  $f(x) = 0$
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq 0$
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) \leq 1$

- 
5. Soit  $B$  un ensemble de 100 boules qui sont, d'une part, soit rouge soit noire ; d'autre part, soit en verre, soit en plastique. On considère les 2 énoncés suivants :

$P$  : Toute boule rouge est en verre

$Q$  : Il existe une boule noire et en verre

- (A) Pour prouver que  $P$  est faux, il suffit de trouver une boule rouge et en plastique  
(B) Pour prouver que  $P$  est faux, il est nécessaire de trouver une boule rouge et en plastique  
(C) Pour prouver que  $P$  est vrai, il est nécessaire de vérifier que toutes les boules noires sont en plastique  
(D) Si  $Q$  est vrai alors  $P$  est faux  
(E) Si  $P$  est faux alors  $Q$  est vrai
6. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, 2]$ , on considère les 2 énoncés suivants :

$P$  : Pour tout  $x \in [0, 2]$ ,  $f(x) \neq 0$

$Q$  :  $f$  n'est pas positive sur  $[0, 2]$

- (A)  $P$  signifie :  $f$  est strictement positive sur  $[0, 2]$  ou strictement négative sur  $[0, 2]$   
(B)  $P$  signifie : Pour tout  $x \in [0, 2]$ ,  $f(x) < 0$  ou  $f(x) > 0$   
(C)  $Q$  signifie :  $f$  est négative sur  $[0, 2]$   
(D) La négation de  $P$  peut s'écrire :  $f$  est la fonction nulle sur  $[0, 2]$   
(E) La négation de  $Q$  peut s'écrire :  $f$  n'est pas négative sur  $[0, 2]$

### Questions à choisir

7. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[-1, 1]$ , paire et vérifiant : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x^6 \leq f(x) \leq x^2$ .

- (A) Pour tout  $x \in [-1, 0]$ ,  $x^6 \leq f(x) \leq x^2$   
(B)  $f(0) = 0$   
(C)  $f'(0) = 0$   
(D)  $f'$  est impaire  
(E) Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $6x^5 \leq f'(x) \leq 2x$

8. Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$

- (A)  $(u_n)$  est une suite géométrique  
(B)  $(u_n)$  est décroissante  
(C)  $(u_n)$  est convergente  
(D) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$   
(E)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$

9. (A)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2}$

(B)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) \, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(C)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

(D)  $\int_0^1 e^{2x} \, dx = e^2 - 1$

(E)  $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \frac{1}{2}$

10. Pour un nombre complexe  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z)$  désigne sa partie réelle,  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire.

(A)  $\operatorname{Re}((1+i)^4) = 4 \operatorname{Re}(1+i)$

(B)  $\arg((1+i)^4) = 4 \arg(1+i) \text{ modulo } 2\pi$

(C)  $\operatorname{Im}((-1+i\sqrt{3})^3) = 3 \operatorname{Im}(-1+i\sqrt{3})$

(D)  $|(-1+i\sqrt{3})^3| = 3|-1+i\sqrt{3}|$

(E)  $\frac{(1+i)^4}{(-1+i\sqrt{3})^3} = -\frac{1}{2}$

11. Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 4 as, 3 rois et 3 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points tandis que celui d'une dame coûte 1 point. On tire simultanément 2 cartes et on note  $X$  le nombre total de points.

(A)  $P(X=7) = \frac{4}{15}$

(B)  $P(X=4) = \frac{4}{15}$

(C)  $P(X=6) = \frac{4}{15}$

(D)  $P(X < 0) = \frac{1}{15}$

(E)  $P(X \geq 1) = \frac{14}{15}$

12. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite  $\Delta$  d'équation  $x - 2y + 4 = 0$ , les points  $I(1, 0)$ ,  $J(-1, 4)$  et  $H(0, 2)$ .

(A) La droite  $(IH)$  est orthogonale à  $\Delta$

(B) Les points  $I, J$  et  $H$  sont alignés

(C) La droite  $(JH)$  est orthogonale à  $\Delta$

(D) La droite orthogonale à  $\Delta$  passant par  $I$  a pour équation  $-x + 2y + 1 = 0$

(E)  $\Delta$  est la médiatrice du segment  $[IJ]$

---

13. Pour tous les entiers naturels  $n$  et  $p$ , strictement positifs

- (A)  $n^2$  pair équivaut à  $n$  pair
- (B)  $n^2 + p^2$  pair équivaut à  $n + p$  pair
- (C) Si  $np$  est impair alors  $n + p$  est impair
- (D) Si  $np$  est impair alors  $n^2 + np + p^2$  est impair
- (E) Si  $n^2 + np + p^2$  est pair alors  $n$  et  $p$  sont pairs

14. On sait que la fonction  $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}}$  est strictement décroissante sur  $[e^4, +\infty[$  et que  $e^4 \approx 54,598$ .  
On programme l'algorithme suivant :

Variable :  $n$  entier naturel

Initialisation :  $n \leftarrow 2$

Traitement : Tant que  $\frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \geq 1$   
 $n \leftarrow n + 1$

Fin Tant que

Sortie : Afficher  $n$

Le programme affiche 5504.

On peut alors affirmer

- (A) Pour tout  $x \in ]5504, +\infty[$ ,  $f(x) \geq 1$
- (B)  $f(5504) < 1$
- (C) Il existe  $x \in [5503, 5504]$ ,  $(\ln(x))^2 = \sqrt{x}$
- (D)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 1$
- (E)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

**CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL**  
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
<b>1</b>	F	V	V	V	F
<b>2</b>	F	V	V	V	F
<b>3</b>	V	F	V	F	F
<b>4</b>	V	V	V	F	F
<b>5</b>	V	V	F	F	F
<b>6</b>	F	V	F	F	F
<b>7</b>	V	V	V	V	F
<b>8</b>	F	V	V	V	F
<b>9</b>	V	V	F	F	V
<b>10</b>	F	V	F	F	V
<b>11</b>	V	F	F	V	V
<b>12</b>	V	V	V	F	V
<b>13</b>	V	V	F	V	V
<b>14</b>	F	V	V	V	V