



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES  
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

---

**SUJET OFFICIEL**

---

***ANNALES CONCOURS***  
***GEIPI POLYTECH***  
**MATHÉMATIQUES**

---

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ [contact@pge-pgo.fr](mailto:contact@pge-pgo.fr) | 🌐 [pge-pgo.fr](http://pge-pgo.fr)



NOM :	PRÉNOM :
Centre d'écrit :	

N° Inscription :
------------------

## SUJET DE MATHÉMATIQUES

### Série S

Mercredi 11 mai 2016

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Les réponses aux questions seront à écrire au stylo et uniquement dans les cadres des documents réponses prévues à cet effet.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.

**Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.**

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Ne rien inscrire  
ci-dessous

1	
2	
3	
4	

**TOTAL**

--

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9  
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

### EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad g(x) = e^x - x.$$

- I-A-1-  $g'$  désigne la dérivée de  $g$ . Donner, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x)$ .
- I-A-2- Donner l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation  $g'(x) \geq 0$ .  
Justifier la réponse.
- I-A-3- Dresser le tableau des variations de  $g$ .  
(les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ne sont pas demandées).
- I-A-4- Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) > 0$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie par :

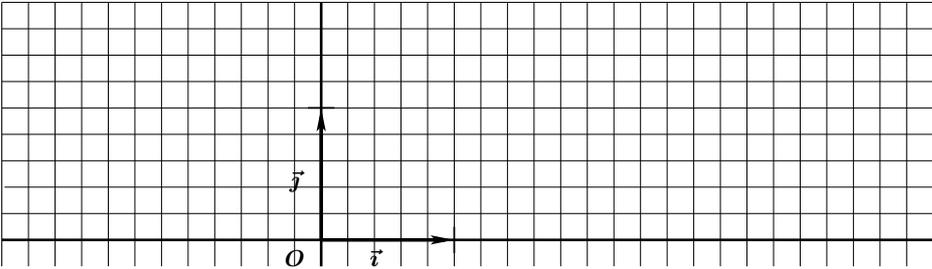
$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- I-B-1-a- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Justifier la réponse.
- I-B-1-b- Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ ? En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier la réponse.
- I-B-1-c- On en déduit que  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .  
Donner une équation de chacune d'elles.
- I-B-2-  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ . Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$ .
- I-B-3-a- Dresser le tableau des variations de  $f$ .
- I-B-3-b-  $f$  présente un maximum  $y_M$  atteint en  $x_M$ . Donner les valeurs exactes de  $x_M$  et  $y_M$ , puis une valeur approchée de  $y_M$  à  $10^{-1}$  près.  
Dans la suite, on note  $M$  le point de coordonnées  $(x_M, y_M)$ .
- I-B-4- Soit  $A$  le point de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisse 0.  
Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
- I-B-5- Placer les points  $A$  et  $M$ . Tracer les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points  $A$  et  $M$  et les asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Puis tracer  $\mathcal{C}$ .
- I-B-6-  $f$  admet sur l'intervalle  $[0, 1]$  un minimum  $a$  et un maximum  $b$ .  
Donner les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ .
- I-B-7- On considère l'intégrale :  $J = \int_0^1 f(x) dx$ .
- I-B-7-a- Hachurer, sur la figure de la question I-B-5-, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut  $J$ .
- I-B-7-b- En utilisant la question I-B-6-, justifier que :  $1 \leq J \leq \frac{e}{e-1}$ .

NE RIEN INSCRIRE ICI

**REPONSES A L'EXERCICE I**

<b>I-A-1-</b>	Pour tout réel $x$ , $g'(x) =$										
<b>I-A-2-</b>	L'ensemble des solutions de l'inéquation $g'(x) \geq 0$ est : En effet :										
<b>I-A-3-</b>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="width: 40%; text-align: center;"><math>-\infty</math></td> <td style="width: 40%; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>g'(x)</math></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>g(x)</math></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$g'(x)$			$g(x)$			
$x$	$-\infty$	$+\infty$									
$g'(x)$											
$g(x)$											
<b>I-A-4-</b>	Pour tout réel $x$ , $g(x) > 0$ . En effet :										
<b>I-B-1-a-</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	en effet :									
<b>I-B-1-b-</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} =$	donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ en effet :									
<b>I-B-1-c-</b>	$\Delta_1 :$	$\Delta_2 :$									
<b>I-B-2-</b>	Soit $x$ un réel. Détail du calcul de $f'(x)$ :										
<b>I-B-3-a-</b>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="width: 40%; text-align: center;"><math>-\infty</math></td> <td style="width: 40%; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>f'(x)</math></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>f(x)</math></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$			$f(x)$			<b>I-B-3-b-</b> $x_M =$ $y_M =$ $y_M \approx$
$x$	$-\infty$	$+\infty$									
$f'(x)$											
$f(x)$											
<b>I-B-4-</b>	Equation de la tangente en $A$ :										
<b>I-B-5-</b>											
<b>I-B-6-</b>	$a =$	$b =$									
<b>I-B-7-a-</b>	Utiliser la figure de la question <b>I-B-5-</b>										
<b>I-B-7-b-</b>	$1 \leq J \leq \frac{e}{e-1}$ en effet :										

## EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait. **60%** des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, **70%** sont fourrés, tandis que **30%** seulement des chocolats au lait sont fourrés.

### Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte.

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

$N$  : “le chocolat choisi est noir”       $F$  : “le chocolat choisi est fourré”.

II-A-1- Donner la probabilité  $P_1$  que le chocolat choisi soit noir.

II-A-2- Déterminer la probabilité  $P_2$  que le chocolat choisi soit noir et fourré.  
Justifier la réponse.

II-A-3- On note  $P_3$  la probabilité que le chocolat choisi soit fourré.  
Justifier que  $P_3 = 0,54$ .

### Partie B

Un client achète une boîte de  $n$  chocolats, où  $n$  est un entier naturel non nul.

Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.

On note  $X_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

II-B-1-  $X_n$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

II-B-2- Dans cette question  $n = 12$  et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

II-B-2-a- Donner la probabilité  $P_4$  que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.

II-B-2-b- Donner la probabilité  $P_5$  que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

II-B-2-c- Donner la probabilité  $P_6$  que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.

II-B-3- Dans cette question,  $n$  est quelconque.

II-B-3-a- Donner, en fonction de  $n$ , la probabilité  $q_n$  que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

II-B-3-b- Déterminer le nombre minimum  $n_0$  de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à **0,98**. Détailler les calculs.

### Partie C

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

Une étude a montré que la variable aléatoire représentant le poids, exprimé en grammes, d'un chocolat choisi au hasard dans l'ensemble de la production suit une loi normale d'espérance  $m = 15$  et d'écart-type  $\sigma = 2$ .

Le service qualité effectue un contrôle et choisit au hasard un chocolat dans l'ensemble de la production.

II-C-1- Donner la probabilité  $P_7$  que le chocolat choisi pèse plus de **17** grammes.

II-C-2- Donner la probabilité  $P_8$  que le chocolat choisi pèse moins de **13** grammes.

II-C-3- Donner la probabilité  $P_9$  que le chocolat choisi pèse entre **12** et **18** grammes.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$P_1 =$	
II-A-2-	$P_2 =$	en effet :
II-A-3-	$P_3 = 0,54$	en effet :
II-B-1-	$X_n$ suit une loi binomiale de paramètres :	
II-B-2-a-	$P_4 \approx$	
II-B-2-b-	$P_5 \approx$	
II-B-2-c-	$P_6 \approx$	
II-B-3-a-	$q_n =$	
II-B-3-b-	$n_0 =$	en effet :
II-C-1-	$P_7 \approx$	II-C-2- $P_8 \approx$
II-C-3-	$P_9 \approx$	

### EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1$ ,  $z_B = 1 + i$  et  $z_C = i$ .

Soit  $x$  un réel appartenant à  $]0, 1[$ .

On nomme :

- $M$  le point du segment  $[AB]$  d'affixe  $z_M = 1 + xi$ ;
- $N$  le point du segment  $[BC]$  d'affixe  $z_N = x + i$ .

Posons  $Z = \frac{z_N}{z_M}$ .

#### Partie A

- III-A-1- Sur la figure, le point  $M$  a été placé pour une certaine valeur du réel  $x$ .  
Tracer le carré  $OABC$  et le triangle  $OMN$ .
- III-A-2- Exprimer, en fonction de  $x$ , les modules  $|z_M|$  et  $|z_N|$ .
- III-A-3- Le triangle  $OMN$  est isocèle. Donner son sommet principal. Justifier la réponse.
- III-A-4-a- Montrer que la droite  $(OB)$  est perpendiculaire à la droite  $(MN)$ .
- III-A-4-b- En déduire que la droite  $(OB)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{MON}$ .
- III-A-5- Justifier que  $|Z| = 1$ .
- III-A-6- Montrer que la forme algébrique de  $Z$  est :  $Z = \frac{2x}{1+x^2} + i \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .
- III-A-7-  $\text{Im}(Z)$  désigne la partie imaginaire de  $Z$ . Montrer que  $\text{Im}(Z) > 0$ .

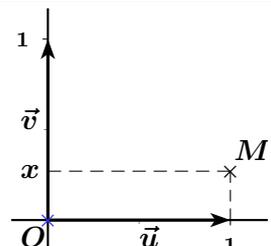
#### Partie B

Dans cette partie  $x = 2 - \sqrt{3}$ .

- III-B-1- Donner la valeur exacte de  $1 + x^2$ .
- III-B-2-a-  $\text{Re}(Z)$  désigne la partie réelle de  $Z$ . Montrer que  $\text{Re}(Z) = \frac{1}{2}$ .
- III-B-2-b- On nomme  $\theta$  un argument de  $Z$ .  
En déduire, en utilisant certains résultats de la **Partie A**, la valeur exacte de  $\theta$ .  
On admet que  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta \ (2\pi)$ .
- III-B-3-a- En utilisant la question III-A-4-b-, donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$ .
- III-B-3-b- Montrer que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12} \ (2\pi)$ .
- III-B-4-a- Justifier que  $1 + x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ .
- III-B-4-b- En déduire la valeur exacte de  $|z_M|$ .
- III-B-5- Ecrire la forme trigonométrique de  $z_M$ .
- III-B-6- On en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ ,  
où  $a$  et  $b$  sont des réels.  
Donner les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ .

NE RIEN INSCRIRE ICI

**REPNSES A L'EXERCICE III**

<p>III-A-1-</p> 	<p>III-A-2-      <math> z_M  =</math></p> <p>                 <math> z_N  =</math></p> <hr/> <p>III-A-3-      <math>OMN</math> est isocèle en .....</p> <p>En effet :</p>
<p>III-A-4-a-    <math>(OB)</math> est perpendiculaire à <math>(MN)</math>, en effet :</p>	
<p>III-A-4-b-    <math>(OB)</math> est la bissectrice de <math>\widehat{MON}</math>, en effet :</p>	
<p>III-A-5-      <math> Z  = 1</math>, en effet :</p>	
<p>III-A-6-      <math>Z = \frac{2x}{1+x^2} + i \frac{1-x^2}{1+x^2}</math>, en effet :</p>	
<p>III-A-7-      <math>\text{Im}(Z) &gt; 0</math>, en effet :</p>	
<p>III-B-1-      <math>1 + x^2 =</math></p>	
<p>III-B-2-a-    <math>\text{Re}(Z) = \frac{1}{2}</math>, en effet :</p>	
<p>III-B-2-b-    <math>\theta =</math></p>	<p>III-B-3-a-    <math>(\vec{OM}, \vec{OB}) =</math></p>
<p>III-B-3-b-    <math>(\vec{u}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{12} (2\pi)</math>, en effet :</p>	
<p>III-B-4-a-    <math>1 + x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2</math>, en effet :</p>	
<p>III-B-4-b-    <math> z_M  =</math></p>	<p>III-B-5-      <math>z_M =</math></p>
<p>III-B-6-      <math>a =</math></p>	<p>                 <math>b =</math></p>

## EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le point  $A$  de coordonnées  $(-4; 2; 1)$  ;
- la droite  $\mathcal{D}_1$  définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 7 + k \\ y = 6 + k \\ z = -3 - k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

- la droite  $\mathcal{D}_2$  passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}_2(1; 0; 2)$ .

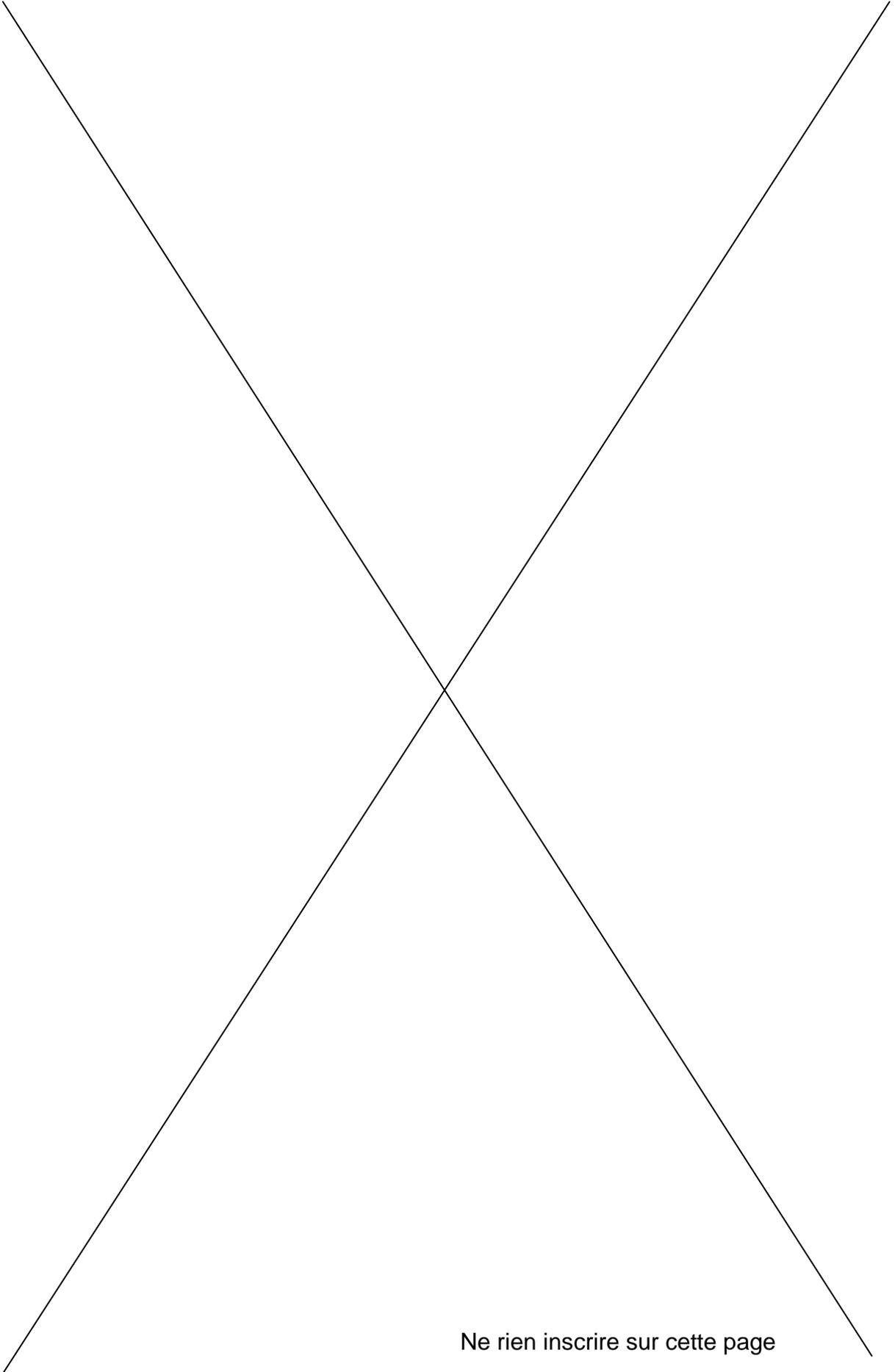
- IV-1- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  de la droite  $\mathcal{D}_1$ .
- IV-2- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\mathcal{D}_2$ . On notera  $t$  le paramètre.
- IV-3- Dans cette question on va montrer que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas coplanaires.
- IV-3-a- Justifier que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas parallèles.
- IV-3-b- Montrer que l'intersection des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est vide.
- IV-4- On considère le vecteur  $\vec{w}$  de coordonnées  $(-2; 3; 1)$ .  
Montrer que  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$  et à  $\vec{u}_2$ .
- IV-5- Soient  $B$  et  $C$  les points définis par  $\vec{AB} = \vec{w}$  et  $\vec{AC} = \vec{u}_2$  et  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(6; 5; -3)$ . On nomme  $\mathcal{P}$  le plan contenant les points  $A, B$  et  $C$ .
- IV-5-a- Montrer que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .
- IV-5-b-  $\mathcal{P}$  a donc une équation cartésienne de la forme :  $6x + 5y - 3z + d = 0$ , où  $d$  désigne un réel.  
Montrer que  $d = 17$ .
- IV-6- On nomme  $E$  le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $\mathcal{D}_1$ .  
Déterminer les coordonnées  $(x_E; y_E; z_E)$  du point  $E$ .
- IV-7- Soit  $\Delta$  la droite passant par  $E$  et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .
- IV-7-a- Quel est le point d'intersection des droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  ?
- IV-7-b- Justifier que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  sont perpendiculaires.
- IV-7-c- Justifier que la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .
- IV-7-d- En déduire que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.

En conclusion, on a démontré que la droite  $\Delta$  est une perpendiculaire commune aux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

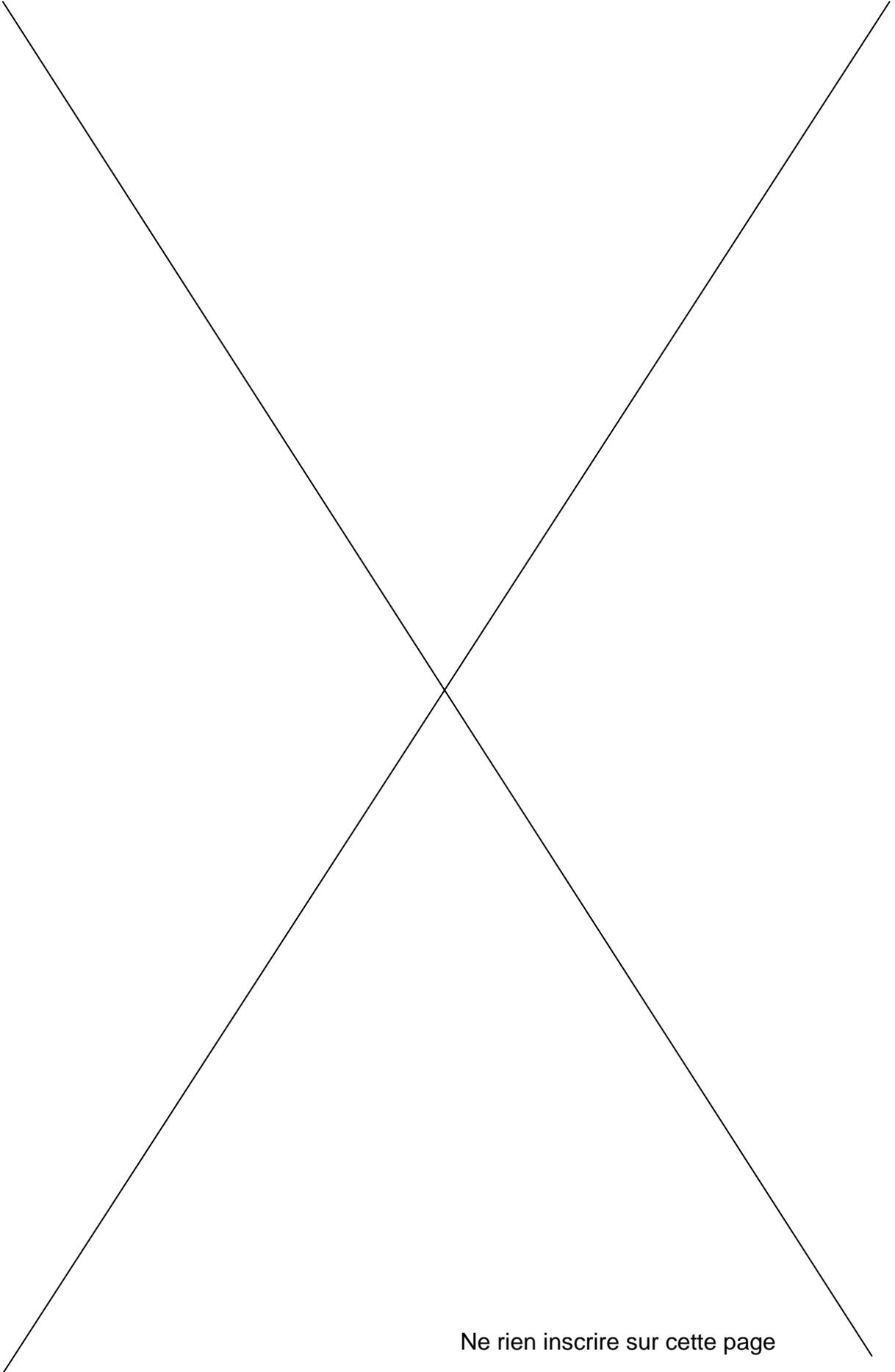
NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-	$\vec{u}_1$ ( ; ; )
IV-2-	$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ , avec $t \in \mathbb{R}$ .
IV-3-a-	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, en effet :
IV-3-b-	L'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est vide, en effet :
IV-4-	$\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$ , en effet :
IV-5-a-	$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ , en effet :
IV-5-b-	$d = 17$ , en effet :
IV-6-	$x_E =$ $y_E =$ $z_E =$ , en effet :
IV-7-a-	Le point d'intersection de $\Delta$ et $\mathcal{D}_1$ est :
IV-7-b-	$\Delta$ et $\mathcal{D}_1$ sont perpendiculaires, en effet :
IV-7-c-	$\Delta$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ , en effet :
IV-7-d-	$\Delta$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires, en effet :



Ne rien inscrire sur cette page



Ne rien inscrire sur cette page

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9  
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

### EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad g(x) = e^x - x.$$

- I-A-1-  $g'$  désigne la dérivée de  $g$ . Donner, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x)$ .
- I-A-2- Donner l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation  $g'(x) \geq 0$ .  
Justifier la réponse.
- I-A-3- Dresser le tableau des variations de  $g$ .  
(les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ne sont pas demandées).
- I-A-4- Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) > 0$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie par :

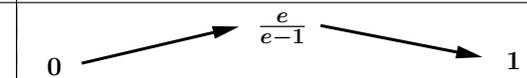
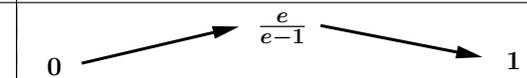
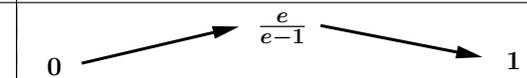
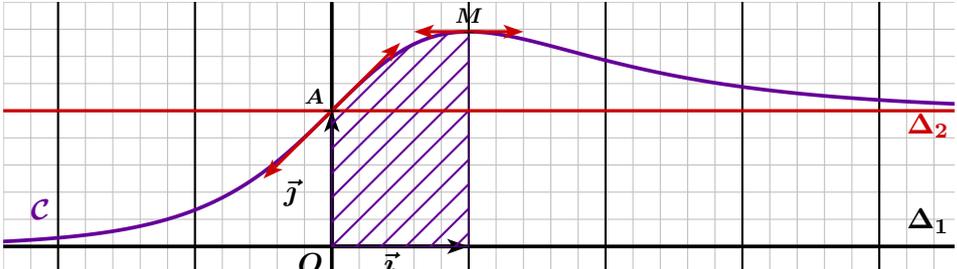
$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- I-B-1-a- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Justifier la réponse.
- I-B-1-b- Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ ? En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier la réponse.
- I-B-1-c- On en déduit que  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .  
Donner une équation de chacune d'elles.
- I-B-2-  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ . Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$ .
- I-B-3-a- Dresser le tableau des variations de  $f$ .
- I-B-3-b-  $f$  présente un maximum  $y_M$  atteint en  $x_M$ . Donner les valeurs exactes de  $x_M$  et  $y_M$ , puis une valeur approchée de  $y_M$  à  $10^{-1}$  près.  
Dans la suite, on note  $M$  le point de coordonnées  $(x_M, y_M)$ .
- I-B-4- Soit  $A$  le point de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisse 0.  
Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
- I-B-5- Placer les points  $A$  et  $M$ . Tracer les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points  $A$  et  $M$  et les asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Puis tracer  $\mathcal{C}$ .
- I-B-6-  $f$  admet sur l'intervalle  $[0, 1]$  un minimum  $a$  et un maximum  $b$ .  
Donner les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ .
- I-B-7- On considère l'intégrale :  $J = \int_0^1 f(x) dx$ .
- I-B-7-a- Hachurer, sur la figure de la question I-B-5-, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut  $J$ .
- I-B-7-b- En utilisant la question I-B-6-, justifier que :  $1 \leq J \leq \frac{e}{e-1}$ .

NE RIEN INSCRIRE ICI

### REPONSES A L'EXERCICE I

<b>I-A-1-</b>	<p>Pour tout réel <math>x</math>, <math>g'(x) = e^x - 1</math></p>													
<b>I-A-2-</b>	<p>L'ensemble des solutions de l'inéquation <math>g'(x) \geq 0</math> est : <math>[0; +\infty[</math>          En effet : <math>g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(1) \Leftrightarrow x \geq 0</math></p>													
<b>I-A-3-</b>	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>g'(x)</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>g(x)</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">  </td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$				
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$											
$g'(x)$	-	0	+											
$g(x)$														
<b>I-A-4-</b>	<p>Pour tout réel <math>x</math>, <math>g(x) &gt; 0</math>. En effet : Pour tout réel <math>x</math>, <math>g(x) \geq g(0) = 1 &gt; 0</math>.</p>													
<b>I-B-1-a-</b>	<p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0</math> en effet : <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0</math> et <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty</math></p>													
<b>I-B-1-b-</b>	<p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0</math> donc <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1</math> en effet : <math>f(x) = \frac{e^x}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{e^x})}</math></p>													
<b>I-B-1-c-</b>	<p><math>\Delta_1 : y = 0</math> <span style="margin-left: 200px;"><math>\Delta_2 : y = 1</math></span></p>													
<b>I-B-2-</b>	<p>Soit <math>x</math> un réel. Détail du calcul de <math>f'(x)</math> :</p> $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$													
<b>I-B-3-a-</b>	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f'(x)</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x)</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">  </td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	$f(x)$				<p><b>I-B-3-b-</b></p> $x_M = 1$ $y_M = \frac{e}{e-1}$ $y_M \approx 1,6$
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$											
$f'(x)$	+	0	-											
$f(x)$														
<b>I-B-4-</b>	<p>Equation de la tangente en <math>A</math> : <math>y = x + 1</math></p>													
<b>I-B-5-</b>														
<b>I-B-6-</b>	<p><math>a = 1</math> <span style="margin-left: 150px;"><math>b = \frac{e}{e-1}</math></span></p>													
<b>I-B-7-a-</b>	<p>Utiliser la figure de la question <b>I-B-5-</b></p>													
<b>I-B-7-b-</b>	<p><math>1 \leq J \leq \frac{e}{e-1}</math> en effet : pour tout <math>x \in [0, 1]</math>, <math>1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}</math>.          Donc <math>\int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{e}{e-1} dx</math> avec <math>\int_0^1 1 dx = 1</math> et <math>\int_0^1 \frac{e}{e-1} dx = \frac{e}{e-1}</math></p>													

## EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait. **60%** des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, **70%** sont fourrés, tandis que **30%** seulement des chocolats au lait sont fourrés.

### Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte.

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

$N$  : “le chocolat choisi est noir”       $F$  : “le chocolat choisi est fourré”.

II-A-1- Donner la probabilité  $P_1$  que le chocolat choisi soit noir.

II-A-2- Déterminer la probabilité  $P_2$  que le chocolat choisi soit noir et fourré.  
Justifier la réponse.

II-A-3- On note  $P_3$  la probabilité que le chocolat choisi soit fourré.  
Justifier que  $P_3 = 0,54$ .

### Partie B

Un client achète une boîte de  $n$  chocolats, où  $n$  est un entier naturel non nul.

Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.

On note  $X_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

II-B-1-  $X_n$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

II-B-2- Dans cette question  $n = 12$  et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

II-B-2-a- Donner la probabilité  $P_4$  que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.

II-B-2-b- Donner la probabilité  $P_5$  que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

II-B-2-c- Donner la probabilité  $P_6$  que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.

II-B-3- Dans cette question,  $n$  est quelconque.

II-B-3-a- Donner, en fonction de  $n$ , la probabilité  $q_n$  que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

II-B-3-b- Déterminer le nombre minimum  $n_0$  de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à **0,98**. Détailler les calculs.

### Partie C

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

Une étude a montré que la variable aléatoire représentant le poids, exprimé en grammes, d'un chocolat choisi au hasard dans l'ensemble de la production suit une loi normale d'espérance  $m = 15$  et d'écart-type  $\sigma = 2$ .

Le service qualité effectue un contrôle et choisit au hasard un chocolat dans l'ensemble de la production.

II-C-1- Donner la probabilité  $P_7$  que le chocolat choisi pèse plus de **17** grammes.

II-C-2- Donner la probabilité  $P_8$  que le chocolat choisi pèse moins de **13** grammes.

II-C-3- Donner la probabilité  $P_9$  que le chocolat choisi pèse entre **12** et **18** grammes.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$P_1 = 0,6$	
II-A-2-	$P_2 = 0,42$	en effet :
	$P_2 = \mathbb{P}(N \cap F) = \mathbb{P}_N(F) \times \mathbb{P}(N) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$	
II-A-3-	$P_3 = 0,54$	en effet :
	$P_3 = \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(N \cap F) + \mathbb{P}(\bar{N} \cap F) = P_2 + \mathbb{P}_{\bar{N}}(F) \times \mathbb{P}(\bar{N})$	
	d'où $P_3 = 0,42 + 0,3 \times (1 - 0,6) = 0,42 + 0,12 = 0,54$	
II-B-1-	$X_n$ suit une loi binomiale de paramètres : $n$ et $p = 0,54$	
II-B-2-a-	$P_4 \approx 0,2171$	
II-B-2-b-	$P_5 \approx 0,9999$	
II-B-2-c-	$P_6 \approx 0,0415$	
II-B-3-a-	$q_n = 1 - 0,46^n$	
II-B-3-b-	en effet :	
	$q_n > 0,98 \Leftrightarrow 1 - 0,46^n > 0,98 \Leftrightarrow 0,46^n < 0,02$	
	$\Leftrightarrow n \ln(0,46) < \ln(0,02) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,46)}$ (car $\ln(0,46) < 0$ )	
	De plus, $\frac{\ln(0,02)}{\ln(0,46)} \approx 5,037$	
II-C-1-	$P_7 \approx 0,1587$	II-C-2- $P_8 \approx 0,1587$
II-C-3-	$P_9 \approx 0,8664$	

### EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1$ ,  $z_B = 1 + i$  et  $z_C = i$ .

Soit  $x$  un réel appartenant à  $]0, 1[$ .

On nomme :

- $M$  le point du segment  $[AB]$  d'affixe  $z_M = 1 + xi$ ;
- $N$  le point du segment  $[BC]$  d'affixe  $z_N = x + i$ .

Posons  $Z = \frac{z_N}{z_M}$ .

#### Partie A

- III-A-1- Sur la figure, le point  $M$  a été placé pour une certaine valeur du réel  $x$ .  
Tracer le carré  $OABC$  et le triangle  $OMN$ .
- III-A-2- Exprimer, en fonction de  $x$ , les modules  $|z_M|$  et  $|z_N|$ .
- III-A-3- Le triangle  $OMN$  est isocèle. Donner son sommet principal. Justifier la réponse.
- III-A-4-a- Montrer que la droite  $(OB)$  est perpendiculaire à la droite  $(MN)$ .
- III-A-4-b- En déduire que la droite  $(OB)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{MON}$ .
- III-A-5- Justifier que  $|Z| = 1$ .
- III-A-6- Montrer que la forme algébrique de  $Z$  est :  $Z = \frac{2x}{1+x^2} + i \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .
- III-A-7-  $\text{Im}(Z)$  désigne la partie imaginaire de  $Z$ . Montrer que  $\text{Im}(Z) > 0$ .

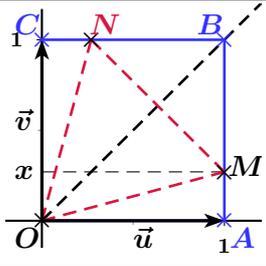
#### Partie B

Dans cette partie  $x = 2 - \sqrt{3}$ .

- III-B-1- Donner la valeur exacte de  $1 + x^2$ .
- III-B-2-a-  $\text{Re}(Z)$  désigne la partie réelle de  $Z$ . Montrer que  $\text{Re}(Z) = \frac{1}{2}$ .
- III-B-2-b- On nomme  $\theta$  un argument de  $Z$ .  
En déduire, en utilisant certains résultats de la **Partie A**, la valeur exacte de  $\theta$ .  
On admet que  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta \ (2\pi)$ .
- III-B-3-a- En utilisant la question III-A-4-b-, donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$ .
- III-B-3-b- Montrer que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12} \ (2\pi)$ .
- III-B-4-a- Justifier que  $1 + x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ .
- III-B-4-b- En déduire la valeur exacte de  $|z_M|$ .
- III-B-5- Ecrire la forme trigonométrique de  $z_M$ .
- III-B-6- On en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ ,  
où  $a$  et  $b$  sont des réels.  
Donner les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ .

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

<p>III-A-1-</p> 	<p>III-A-2- <math> z_M  = \sqrt{1+x^2}</math>  <math> z_N  = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+x^2}</math></p>
	<p>III-A-3- <math>OMN</math> est isocèle en <math>O</math>          En effet : <math>OM =  z_M  =  z_N  = ON</math></p>
<p>III-A-4-a- <math>(OB)</math> est perpendiculaire à <math>(MN)</math>, en effet :          les vecteurs <math>\vec{OB}(1,1)</math> et <math>\vec{MN}(x-1,1-x)</math> sont orthogonaux car  <math>\vec{OB} \cdot \vec{MN} = 1 \times (x-1) + 1 \times (1-x) = 0</math>.</p>	
<p>III-A-4-b- <math>(OB)</math> est la bissectrice de <math>\widehat{MON}</math>. En effet :  <math>OMN</math> est isocèle en <math>O</math> et <math>(OB)</math> est la hauteur issue du sommet <math>O</math>,          c'est donc aussi la bissectrice de l'angle <math>\widehat{MON}</math>.</p>	
<p>III-A-5- <math> Z  = 1</math>, en effet : <math> Z  = \frac{ z_N }{ z_M } = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1</math></p>	
<p>III-A-6- <math>Z = \frac{2x}{1+x^2} + i \frac{1-x^2}{1+x^2}</math>, en effet :  <math>Z = \frac{x+i}{1+xi} = \frac{(x+i)(1-xi)}{(1+xi)(1-xi)} = \frac{x-x^2i+i+x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} + i \frac{1-x^2}{1+x^2}</math>.</p>	
<p>III-A-7- <math>\text{Im}(Z) &gt; 0</math>, en effet : <math>\text{Im}(Z) = \frac{1-x^2}{1+x^2}</math>, avec <math>1+x^2 &gt; 0</math>          et, comme <math>x \in ]0,1[</math>, <math>1-x^2 &gt; 0</math>.</p>	
<p>III-B-1- <math>1+x^2 = 8-4\sqrt{3}</math></p>	
<p>III-B-2-a- <math>\text{Re}(Z) = \frac{1}{2}</math>, en effet : <math>\text{Re}(Z) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2(4-2\sqrt{3})} = \frac{1}{2}</math></p>	
<p>III-B-2-b- <math>\theta = \frac{\pi}{3}</math></p>	<p>III-B-3-a- <math>(\vec{OM}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)</math></p>
<p>III-B-3-b- <math>(\vec{u}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{12} \quad (2\pi)</math>, en effet :  <math>(\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{OB}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{OM}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}</math></p>	
<p>III-B-4-a- <math>1+x^2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2</math>, en effet :  <math>(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 6 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3} = 1+x^2</math></p>	
<p>III-B-4-b- <math> z_M  = \sqrt{6}-\sqrt{2}</math></p>	<p>III-B-5- <math>z_M = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)</math></p>
<p>III-B-6- <math>a = 1</math></p>	<p><math>b = 2 - \sqrt{3}</math></p>

## EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le point  $A$  de coordonnées  $(-4; 2; 1)$  ;
- la droite  $\mathcal{D}_1$  définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 7 + k \\ y = 6 + k \\ z = -3 - k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

- la droite  $\mathcal{D}_2$  passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}_2(1; 0; 2)$ .

IV-1- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  de la droite  $\mathcal{D}_1$ .

IV-2- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\mathcal{D}_2$ . On notera  $t$  le paramètre.

IV-3- Dans cette question on va montrer que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas coplanaires.

IV-3-a- Justifier que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas parallèles.

IV-3-b- Montrer que l'intersection des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est vide.

IV-4- On considère le vecteur  $\vec{w}$  de coordonnées  $(-2; 3; 1)$ .  
Montrer que  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$  et à  $\vec{u}_2$ .

IV-5- Soient  $B$  et  $C$  les points définis par  $\vec{AB} = \vec{w}$  et  $\vec{AC} = \vec{u}_2$  et  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(6; 5; -3)$ . On nomme  $\mathcal{P}$  le plan contenant les points  $A, B$  et  $C$ .

IV-5-a- Montrer que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

IV-5-b-  $\mathcal{P}$  a donc une équation cartésienne de la forme :  $6x + 5y - 3z + d = 0$ , où  $d$  désigne un réel.  
Montrer que  $d = 17$ .

IV-6- On nomme  $E$  le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $\mathcal{D}_1$ .  
Déterminer les coordonnées  $(x_E; y_E; z_E)$  du point  $E$ .

IV-7- Soit  $\Delta$  la droite passant par  $E$  et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .

IV-7-a- Quel est le point d'intersection des droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  ?

IV-7-b- Justifier que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  sont perpendiculaires.

IV-7-c- Justifier que la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

IV-7-d- En déduire que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.

En conclusion, on a démontré que la droite  $\Delta$  est une perpendiculaire commune aux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

NE RIEN INSCRIRE ICI

**REPONSES A L'EXERCICE IV**

IV-1-	$\vec{u}_1 \quad ( 1 ; 1 ; -1 )$
IV-2-	$\mathcal{D}_2 \quad : \quad \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad , \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$
IV-3-a-	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, en effet : $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
IV-3-b-	L'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est vide, en effet : Si $M(x; y; z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ , $x, y$ et $z$ vérifient $\begin{cases} x = 7 + k = -4 + t \\ y = 6 + k = 2 \\ z = -3 - k = 1 + 2t \end{cases}$ . Alors $\begin{cases} k = -4 \\ t = 7 \\ t = 0 \end{cases}$ . Ce qui est absurde.
IV-4-	$\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$ , en effet : $\vec{w} \cdot \vec{u}_1 = -2 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}_2 = -2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = 0$
IV-5-a-	$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ , en effet : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -12 + 15 - 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 6 + 0 - 6 = 0$ $\vec{n}$ est donc orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ .
IV-5-b-	$d = 17$ , en effet : Comme $A(-4; 2; 1) \in \mathcal{P}$ , ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$ , donc : $d = -6x_A - 5y_A + 3z_A = -6 \times (-4) - 5 \times 2 + 3 \times 1 = 24 - 10 + 3 = 17$ .
IV-6-	$x_E = 0, \quad y_E = -1, \quad z_E = 4$ , en effet : $x_E, y_E$ et $z_E$ vérifient $\begin{cases} x_E = 7 + k \\ y_E = 6 + k \\ z_E = -3 - k \end{cases}$ et $6x_E - 5y_E - 3z_E + 17 = 0$ . Donc $6(7 + k) + 5(6 + k) - 3(-3 - k) + 17 = 0$ , donc $14k + 98 = 0$ , donc $k = -7$ . D'où $x_E = 7 - 7 = 0, \quad y_E = 6 - 7 = -1$ et $z_E = -3 + 7 = 4$ .
IV-7-a-	Le point d'intersection de $\Delta$ et $\mathcal{D}_1$ est : $E$
IV-7-b-	$\Delta$ et $\mathcal{D}_1$ sont perpendiculaires, en effet : $\Delta$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes en $E$ . De plus, leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}_1$ sont orthogonaux.
IV-7-c-	$\Delta$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ , en effet : $E$ est un point commun à $\Delta$ et $\mathcal{P}$ . De plus, $\Delta$ est parallèle à $\mathcal{P}$ car le vecteur directeur $\vec{w}$ de $\Delta$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathcal{P}$ .
IV-7-d-	$\Delta$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires, en effet : $\Delta$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires car incluses toutes les deux dans le plan $\mathcal{P}$ . De plus, leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.