



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

SUJET OFFICIEL

ANNALES CONCOURS ADVANCE
MATHÉMATIQUES

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ contact@pge-pgo.fr | 🌐 pge-pgo.fr

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1h30

Questions Obligatoires

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$,

alors :

- (A) f est continue sur $] -\infty, -1[$
- (B) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$
- (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- (D) f est décroissante sur $] -1, +\infty[$
- (E) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}$ et $g(x) = e^{2x} - 1$, alors :

- (A) Pour tout $x \in] -\infty, 0]$, $g(x) \leq 0$
- (B) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \geq 0$
- (C) f est décroissante sur $] -\infty, 0]$
- (D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- (E) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. Soit pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = 1 - \cos(2x)$ $g(x) = \sin^2(x)$ alors :

- (A) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
- (B) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = \sin(2x)$
- (C) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = 2g'(x)$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = 1$
- (E) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$

4. Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) + 1 - x$, alors :

- (A) $f(1) > 0$
- (B) Pour tout $x \in [1, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1-x}{x}$
- (C) f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$
- (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- (E) Il existe un unique $a \in [1, +\infty[$, $a = \ln(2a) + 1$

5. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-2, 3]$ telle que $f(0) = 1$ et dont la **dérivée** f' a pour tableau de variations :

x	-2	-1	0	1	3
f'	0	-2	0	1	0

Alors :

- (A) f est croissante sur $[-1, 0]$
- (B) f est croissante sur $[1, 3]$
- (C) Pour tout $x \in [0, 3]$, $f(x) \geq 1$
- (D) Pour tout x et x' tels que $-2 < x < x' < 0$, $f(x') < f(x)$
- (E) $f(-2) \geq 1$

6. Soit a, b, c et d quatre entiers naturels non nuls. On a :

- (A) $\frac{a}{bc} = \frac{b}{c}$
- (B) $\frac{ac}{bd} = \frac{b}{\frac{c}{d}}$
- (C) $\frac{a+b}{d+b} = \frac{a}{d}$
- (D) $\frac{ab}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$
- (E) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Questions à choisir

7. Soit $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

Alors :

- (A) f est continue sur $]0,1[$
- (B) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$
- (C) Sur $]1,+\infty[$, une primitive F de f est : $F(x) = -\frac{1}{\ln^2(x)}$
- (D) f admet une primitive sur $]0,1[$
- (E) $\int_2^4 f(x) dx = \ln(2)$

8. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\pi + x}{2} \quad \text{si } x \in [-\pi, 0[\quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{si } x \in [0, \pi].$$

Alors :

- (A) f est continue sur $[-\pi, \pi]$
- (B) f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$
- (C) La valeur moyenne de f sur $[-\pi, \pi]$ est $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
- (D) $\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx$
- (E) La valeur moyenne de f sur $[-\pi, \pi]$ est $\frac{\pi}{4}$

9. Soit $f(t) = \frac{t+2}{t+1}$ et $I = \int_0^1 f(t) dt$ on a :

- (A) $I \geq 1$
- (B) $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{t+1}\right) dt$
- (C) $I = 1 + \ln 2$
- (D) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- (E) $\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \leq I$

10. Soit z et z' les deux nombres complexes $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = (1+i)z$

- (A) $z' = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$
- (B) $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- (C) $|z'| = \sqrt{2}|z|$
- (D) $z' = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$
- (E) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

11. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $P(3; -1; 5)$ $Q(-2; 2; 3)$ $R(-1; -2; 4)$ et $S(5; 8; 4)$.

- (A) \overline{PQ} et \overline{PR} sont colinéaires
- (B) Les points P , Q et R sont alignés
- (C) Le triangle PQR est isocèle en R
- (D) Les plans (PQR) et (PQS) sont confondus
- (E) $\overline{PS} = -3\overline{PR} + 2\overline{PQ}$

12. Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = \frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$. On note X la variable aléatoire sur $[0, 3]$ dont la loi de probabilité a pour densité f .

- (A) $\int_0^3 f(x) dx = 1$
- (B) $P(X \geq 2) = \frac{7}{36}$
- (C) $P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 f(x) dx$
- (D) $P(1 \leq X \leq 2) \leq P(X \geq 2)$
- (E) $P(X \geq 1) \leq P(X \geq 2)$

13. Dans un restaurant sans réservation, on modélise le temps d'attente en minutes pour obtenir une table par une variable aléatoire X . X suit une loi exponentielle de paramètre λ . Une étude statistique a montré que le temps moyen d'attente est de 10 mn.

- (A) $\lambda = 10$
 (B) $\frac{1}{\lambda} = 10$
 (C) La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 mn est $\int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx$
 (D) La probabilité qu'un client attende plus de 20 mn est $1 - \int_0^{20} 10 e^{-10x} dx$
 (E) Un client attend depuis 10mn. La probabilité qu'il doive attendre encore au moins 20mn est égale à la probabilité qu'il attende plus de 20mn

14. On considère l'algorithme suivant dans lequel $rand(1,7)$ donne un nombre entier aléatoire entre 1 et 7.

Variables i, j, k entiers naturels
 Initialisation $i \leftarrow 1, k \leftarrow 0$
 Traitement Tant que $i < 6$
 $j \leftarrow rand(1,7)$
 Si $j > 4$ alors
 $k \leftarrow k + 1$
 Fin Si
 $i \leftarrow i + 1$
 Fin Tant que
 Sortie Afficher k

- (A) k est affiché lorsque j a été affecté 6 fois
 (B) La valeur affichée de k est un entier inférieur à 4
 (C) La probabilité que $k = 0$ est égale à $\frac{4}{7}$
 (D) La probabilité que $k = 3$ est égale à $4 \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right)^4$
 (E) La probabilité que $k = 4$ est égale à $\left(\frac{3}{7}\right)^5$

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	V	F	V	V	V
2	V	V	V	V	V
3	V	F	V	V	V
4	V	V	V	V	V
5	F	V	V	V	V
6	V	F	F	F	F
7	V	F	F	V	V
8	V	F	V	V	V
9	V	V	V	V	V
10	V	F	V	V	V
11	F	F	V	V	V
12	V	F	F	V	F
13	F	V	V	F	F
14	F	F	F	F	V