PGE ▪ PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

CORRIGÉ OFFICIEL

ANNALES BAC MATHÉMATIQUES 2022

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

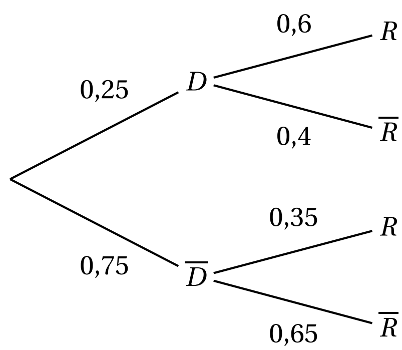
0187660050 | contact@pge-pgo.fr | pge-pgo.fr

∽ Corrigé du baccalauréat Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **7 points**
Principaux domaines abordés : Probabilités

1. **a.**



   b. $p\left(\overline{D}\cap R\right) = p\left(\overline{D}\right)\times p_{\overline{D}}(R) = 0,75\times 0,35 = 0,2625$.

   c. On a de même $p(D\cap R) = p(D)\times p_D(R) = 0,25\times 0,6 = 0,15$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(R) = p(D\cap R) + p\left(\overline{D}\cap R\right) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

   d. Il faut trouver $p_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(R\cap\overline{D}\right)}{p(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364$, soit 0,64 au centième près.

2. **a.** Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

   b. On a $E = np = 10\times 0,35 = 3,5$: en moyenne sur 20 tirs Stéphanie en réussira 7.

   c. La calculatrice donne $p(X \leqslant 6) \approx 0,97$.

   d. On a de même $p(X \geqslant 6) \approx 0,095$.

3. La probabilité de rater n tirs à 3 points est égale à $0,65^n$, donc elle d'en réussir un est $1 - 0,65^n$.
   Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $1 - 0,65^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,65^n$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,62 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \leqslant n$ (car $\ln 0,65 < 0$).
   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \approx 10,69$; le plus petit naturel solution est donc 11 : Stéphanie doit tenter 11 tirs.

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

1. **a.** Somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$

   b. On a $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} - 2 = -2$.
   De plus $f'(\mathrm{e}) = \ln\mathrm{e} = 1$.
   On sait que $M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y - (-2) = 1(x - \mathrm{e}) \iff y = x - 2 - \mathrm{e}$.

   c. De $f'(x) = \ln x$, on en déduit que $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Comme $x > 0$, on a donc $f''(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

   d. Le résulta précédent montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente T.

2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

   b. On a pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on peut écrire :
   $f(x) = x[\ln(x) - 1] - 2$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a $f'(x) = \ln x$. On sait que :
   - sur $]0\ ;\ 1[$, $\ln x < 0$: donc f décroit sur cet intervalle ;
   - sur $]1\ ;\ +\infty[$, $\ln x > 0$: donc f croit sur cet intervalle ;
   - $f(1) = -1 - 2 = -3$ est donc le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ -2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, f est strictement croissante de -3 à plus l'infini.
   f étant continue car dérivable, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique α de $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   b. On a $f(4,3) \approx -0,028$ et $f(4,4) \approx 0,119$.
   D'après le même théorème ceci montre que $\alpha \in]4,3\ ;\ 4,4[$.

c. Conclusion :
- sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$;
- $f(\alpha) = 0$.

La fonction `seuil(0.01)` renvoie la valeur 4,32.

Ceci donne l'encadrement de α au centième près : $4,31 < \alpha < 4,32$.

EXERCICE 3 **7 points**

Principaux domaines abordés : géométrie dans l'espace

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

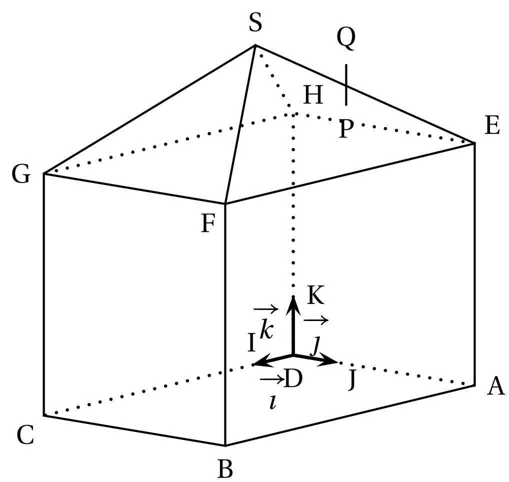
Soit les points I, J et K tels que

$\overrightarrow{\text{DI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{DC}}$, $\overrightarrow{\text{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{DA}}$, $\overrightarrow{\text{DK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{DH}}$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{\text{DI}}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\text{DJ}}$, $\vec{k} = \overrightarrow{\text{DK}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;\,2\,;\,6)$.



1. B(6; 4; 0), E(0; 4; 4), F(6; 4; 4), G(6; 0; 4).

2. On a $\mathcal{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.

La hauteur de la pyramide est égale à $6 - 4 = 2$, donc :

$V(\text{EFGHS}) = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.

D'autre part $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

Le volume de la maison est donc égal à $16 + 96 = 112$.

Or $\dfrac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \dfrac{16}{112}\dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

3. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{ES}}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{EF}} \cdot \vec{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ et

$\overrightarrow{\text{ES}} \cdot \vec{n} = 3 \times 0 - 2 \times 1 + 2 \times 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff 0x + 1y + 1z = d, \quad d \in \mathbb{R}$.

Or, par exemple $\text{E}(0; 4; 4) \in (\text{EFS}) \iff 0 + 4 + 4 = d \iff d = 8$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff y + z = 8$.

4. **a.** On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff \overrightarrow{\text{Q}M} = t\,\overrightarrow{k}, \quad (t \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 & = & 0t \\ y-3 & = & 0t \\ z-5,5 & = & 1t \end{array}\right. \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b. Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ y+z & = & 8 \end{array}\right. \Rightarrow 3+5,5+t = 8 \iff t = -0,5.$$

Conclusion : P(2 ; 3 ; 5).

c. On a $\text{PQ}^2 = (2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2 = 0,25$, donc $\text{PQ} = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ x & = & -4+6s \\ y & = & 7-4s \\ z & = & 2+4s \end{array}\right.$$

On en déduit (équations 1 et 4) que $2 = -4+6s \iff 6 = 6s \iff s = 1$ et (équations 3 et 6) que $5,5+t = 2+4 \iff t = 0,5$.

Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées $(2\,;\,3\,;\,4)$

Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R})$$

L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t = -0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t = 0$) ; autrement dit les points du segment vérifient le système :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in [\text{PQ}] \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (-0,5 \leqslant t \leqslant 0).$$

Le point commun aux deux droites correspond lui à $t = 0,5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés : suites, fonctions, primitives

1.
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc puisque $n+1 \geqslant 1 > 0$ et que $\dfrac{1}{n1} > 0$, on en déduit que pour tout naturel :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) encadrée par deux suites ayant pour limite 0 a pour limite 0.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

On a $w_0 = \mathrm{e}^{-2v_0} + 2 = \mathrm{e}^{-2\ln(a)} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln(a)}} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(a^2)}} + 2 = \dfrac{1}{a^2} + 2.$

2. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :
On a successivement :
$v_n \leqslant v_{n+1} \Rightarrow 2v_n \leqslant 2v_{n+1} \Rightarrow -2v_{n+1} \leqslant -2v_n \Rightarrow \mathrm{e}^{-2v_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-2v_n}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $\mathrm{e}^{-2v_{n+1}} + 2 \leqslant \mathrm{e}^{-2v_n} + 2$, soit $w_{n+1} \leqslant w_n$: la suite (w_n) est décroissante.
D'autre part on sait que quel que soit le réelα, $\mathrm{e}^{\alpha} > 0$ donc la suite est minorée par 2.

3.
$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Soit la suite (b_n) définie pour tout naturel n par $b_n = a_n + \alpha$.
Alors $b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}(b_n - \alpha) + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n - \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{8+2\alpha}{3}.$
Prenons $\alpha = -4$, alors $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$: cette égalité montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 + \alpha = 2 - 4 = -2$.
On sait qu'alors que, quel que soit le naturel n, $b_n = b_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
Finalement $b_n = a_n - 4 \iff a_n = 4 + b_n = 4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On a quel que soit le naturel n, $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or quel que soit le réel b_n, $b_n^2 \geqslant 0$, donc $\left(b_n\right)^2 + 3 \geqslant 3 > 2$, donc $\dfrac{2}{\left(b_n\right)^2 + 3} < 1$ et enfin $\ln\left(\dfrac{2}{\left(b_n\right)^2 + 3}\right) < 0$.

Conclusion : $b_{n+1} - b_n < 0$ montre que la suite $\left(b_n\right)$ est décroissante.

5.

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

- Au voisinage de zéro : $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$: géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.
- Au voisinage de plus l'infini : on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc pas d'asymptote.

6.

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2+1}.$$

En posant $u(x) = x^2+1$, on a $u'(x) = 2x$ et l'on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times \mathrm{e}^{x^2+1} = \dfrac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$: on reconnait la dérivée de $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$.

Donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$.