



**PGE • PGO**

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES  
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

---

**CORRIGÉ OFFICIEL**

---

**ANNALES BAC  
MATHÉMATIQUES  
2023**

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ [contact@pge-pgo.fr](mailto:contact@pge-pgo.fr) | 🔍 [pge-pgo.fr](https://pge-pgo.fr)

---

# Corrigé EDS 2023 Nouvelle Calédonie Jour 1

S. DIBOS

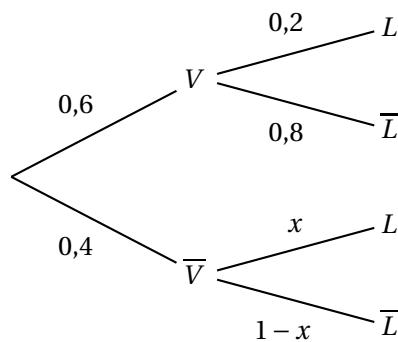
28 août 2023

## Exercice 1

5 points

### Partie A

1.



2. La probabilité qu'un client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est  $P(V \cap \bar{L})$ .

$$P(V \cap \bar{L}) = P(V) \times P_V(\bar{L}) = 0,6 \times 0,8 = \boxed{0,48}$$

3. Les événements  $V$  et  $\bar{V}$  forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P(\bar{V} \cap L)$$

On a  $P(V \cap L) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$ .

Posons  $P(\bar{V} \cap L) = p$ . On a :

$$P(L) = 0,12 + p \iff 0,42 = 0,12 + p \iff p = 0,42 - 0,12 = \boxed{0,3}$$

On a donc bien  $P(\bar{V} \cap L) = 0,3$ .

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\bar{V}}(L) = \frac{P(\bar{V} \cap L)}{P(\bar{V})} = \frac{0,3}{0,4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0,75}$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi un voilier, sachant qu'il a pris l'option PILOTE est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,12}{0,42} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0,29}$$

## Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0,42 \times 0,005 = \boxed{0,0021}$$

$$P(\bar{L} \cap A) = P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(A) = (1 - 0,42) \times 0,12 = \boxed{0,0696}$$

2. Les événements  $L$  et  $\bar{L}$  forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P(\bar{L} \cap A) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est donc 0,0717.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à 72 avaries.

## Partie C

1. Les paramètres de la loi binomiale suivie par  $X$  sont  $\boxed{n = 40}$  et  $\boxed{p = 0,42}$ .

2. À l'aide de la calculatrice, on calcule  $P(X \geq 15)$  :

$$\boxed{P(X \geq 15) \approx 0,768}$$

## Exercice 2

5 points

1. a.

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

c. Il semble que la suite  $(u_n)$  soit croissante et tende vers  $+\infty$ .

2. a. Soit  $P_n$  la proposition  $u_n \geq n + 1$ .

**Initialisation** :  $u_0 = 3$  et  $0 + 1 = 1$ .

$3 \geq 1$ . La proposition est donc vraie au rang  $n = 0$ .

**Hérédité** : on suppose la proposition vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n + 1$  (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geq n + 1 &\iff 5u_n \geq 5(n + 1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geq n + 2 = (n + 1) + 1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

**Conclusion** : la proposition  $P_n$  est vérifiée au rang  $n = 0$  et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n \geq n + 1$ .

b. On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ . Puisque  $u_n \geq n+1$ , par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

3. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 5$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$ .

b. Puisque  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme  $v_0 = 2$ , on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

c.  $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$ . Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque  $5 > 1$ , la suite de terme général  $5^n$  est strictement croissante, donc  $5^{n+1} \geq 5^n$ .

$$\begin{aligned} 5^{n+1} \geq 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geq 2 \times 5^n \\ &\iff 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geq 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 2 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq u_n \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

b.

u	n	u < 10 <sup>7</sup>
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est  $n = 10$ . C'est le rang à partir duquel  $u_n \geq 10^7$ .

**Exercice 3****5 points**

1. On a  $f(x) = (x+1)e^x = xe^x + e^x$ . Donc les primitives de  $f$  sont de la forme  $F(x) = xe^x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .  
Donc  $F(x) = 1 + xe^x$  est une primitive de  $f$ .

**Réponse a.**

2.  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(d_1)$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(d_2)$ .

On a  $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$ , donc  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Supposons qu'elles soient sécantes en un point A. Alors les coordonnées  $(a; b; c)$  de A vérifient les deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} a = 2+r \\ b = 1+r \\ c = -r \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = 1-s \\ b = -1+s \\ c = 2-s \end{cases} .$$

On a donc  $-r = 2-s \iff r = s-2$  et  $2+r = 1-s \iff 2+s-2 = 1-s \iff 2s = 1 \iff s = \frac{1}{2}$ .

Donc :  $b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ,  $a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  et  $c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

Les deux droites sont sécantes en  $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

**Réponse a.**

3. Un vecteur normal au plan (P) est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de  $(\Delta)$  est  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On a :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$ , donc  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux. Donc (P) et  $(\Delta)$  sont parallèles.  
S'il existe un point commun à (P) et  $(\Delta)$ , alors  $(\Delta)$  est incluse dans (P).

$(\Delta)$  passe par le point de coordonnées  $(2; 4; 1)$ . Or  $2 \times 2 - 4 + 2 = 0$ , donc ce point est un point du plan (P). La droite  $(\Delta)$  est donc incluse dans le plan (P).

**Réponse b.**

4. Un vecteur normal à  $(P_1)$  est  $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal à  $(P_2)$  est  $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On a  $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$ , donc  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont donc pas parallèles. Ils sont donc sécants.

De plus  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 2 - 2 \times 1 + 1 \times 1 = 1$ , donc les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas orthogonaux. Les plans ne sont donc pas perpendiculaires.

**Réponse c.**

5. On sait que  $\vec{EF} \cdot \vec{EG} = \|\vec{EF}\| \times \|\vec{EG}\| \times \cos(\vec{EF}, \vec{EG}) \iff \cos \alpha = \frac{\vec{EF} \cdot \vec{EG}}{\|\vec{EF}\| \times \|\vec{EG}\|}$

On a :  $\vec{EF} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{EG} \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .  $\vec{EF} \cdot \vec{EG} = 1 \times (-3) + 2 \times 0 + 2 \times 4 = 5$

$$\|\vec{EF}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{EG}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Donc :  $\cos \alpha = \frac{5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$ , soit  $\alpha \approx 71^\circ$  d'après la calculatrice. **Réponse d.**

**Exercice 4****5 points**

1. a.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)]$

$$\text{Par croissance comparée } \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (5x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{somme} \end{array} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = 0$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0}$$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{2}{x} \right) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{somme} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{produit} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2x + 2 - 2 \left[ 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right] = 10x + 2 - 2[2x \ln(x) + x] = 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x \\ &= \boxed{8x + 2 - 4x \ln(x)} \end{aligned}$$

3. a.

$$f''(x) = 8 - 4 \left[ 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right] = 8 - 4 \ln(x) - 4 = 4 - 4 \ln(x) = \boxed{4[1 - \ln(x)]}$$

b. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si,  $f$  est convexe, ce qui équivaut à  $f''(x)$  est positif.

$$f''(x) \geq 0 \iff 4[1 - \ln(x)] \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } ]0; +\infty[).$$

La courbe  $\mathcal{C}_f$  est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle  $]0; e]$ .

c.

$x$	0	e	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	0	-
Variations de $f'$	2	$4e+2$	$-\infty$

$$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e) = 8e + 2 - 4e = 4e + 2$$

4. a. Sur  $]0 ; e]$ , la fonction  $f'$  est strictement croissante avec  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ , donc pour tout  $x \in ]0 ; e]$ , on a  $f'(x) > 0$ .

Sur  $[e ; +\infty[$ , la fonction  $f'$  est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus,  $f'(e) = 4e + 2 > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ .  $0 \in ]-\infty ; 4e + 2[$ , donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[e ; +\infty[$ .

Au final, l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

On a :

$$7,87 < \alpha < 7,88$$

- b. On sait que sur  $]0 ; e]$  on a  $f'(x) > 0$ . Puisque  $f'$  est décroissante sur  $[e ; +\infty[$  et qu'elle s'annule en  $\alpha$ ,  $f'(x) \geq 0$  sur  $[e ; \alpha]$  et  $f'(x) \leq 0$  sur  $[\alpha ; +\infty[$ . Donc  $f'(x)$  est positif sur  $]0 ; \alpha]$  et négatif sur  $[\alpha ; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

5. On a  $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha)$ , donc :

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0 \\
 &\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha + 1)}{4\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha \\ &= \boxed{\alpha^2 + \alpha} \end{aligned}$$

6. D'après la question 4.a., on a :

$$\begin{aligned} 7,87 < \alpha < 7,88 &\iff 61,936\ 9 < \alpha^2 < 62,094\ 4 \\ &\iff 69,806\ 9 < \alpha^2 + \alpha < 69,974\ 4 \\ &\iff \boxed{69,806\ 9 < f(\alpha) < 69,974\ 4} \end{aligned}$$