



PGE • PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

CORRIGÉ OFFICIEL

**ANNALES BAC
MATHÉMATIQUES
2022**

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

☎ 0187660050 | ✉ contact@pge-pgo.fr | 🔍 pge-pgo.fr

∞ Corrigé du baccalauréat Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Jour 1 ∞

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

EXERCICE 1 7 points

probabilités

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} -4\ln x = -\infty$ et par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à \mathcal{C}_f au voisinage de 0.

- b. On a puisque $x > 0$, $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{6}{x} = 1$ (par somme de limites), puis
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, d'où
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$ (par produit de limites); enfin
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc finalement :
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. a. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}.$$

- b. Comme $x > 0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2 - 6x + 4$ ou plus simplement du trinôme $x^2 - 3x + 2$.

Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où $f'(x) < 0$

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où elle est décroissante.

On a $f(1) = 1 - 6 + 4\ln 1 = 0 - 5 = -5$ et $f(2) = 4 - 12 + 4\ln 2 = 4\ln 2 - 8 \approx -5,23$.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	-5	$\ln(2) - 8$	$+\infty$	

3. • On a $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln 4 = -8 + 8 \ln 2 \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln 25 = 4 \ln 5 - 5 \approx 1,44$;
- Sur l'intervalle $[4; 5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante de $f(4) < 0$ à $f(5) > 0$, donc :
- d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4; 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$.
- a. On a $2x^2 - 4 = 0 \iff 2(x^2 - 2) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x + \sqrt{2} = 0 \\ x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$
- Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ ou ici puisque $x > 0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$. Conclusion :
- Sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$, $f''(x) < 0$, la fonction f est concave;
 - Sur l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, $f''(x) > 0$, la fonction f est convexe;
 - $f''(\sqrt{2}) = 0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f(0) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln \sqrt{2} = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2 = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln 2$ est le point d'inflexion de \mathcal{C}_f , car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
- b. • Pour $k \in]0; \sqrt{2}[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[AM_k]$ est en dessous de \mathcal{C}_f .
- Pour $k \in]\sqrt{2}; +\infty[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[AM_k]$ est au-dessus de \mathcal{C}_f .

EXERCICE 2 7 points

probabilités

$$f(x) = x^3 e^x.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
- a. • $u_1 = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$;
- $u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3} \times (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034$.
- b. On a $\text{fonc}(2) = u_2 \approx -0,034$.
2. a. En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :
- $$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$
- b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

- Quel que soit le réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations;

$3+x < 0 \iff x < -3$: sur $]-\infty; -3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -3[$;

$3+x > 0 \iff x > -3$: sur $] -3; +\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $] -3; +\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur \mathbb{R} .

- On a $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$;

- De $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- c.** *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a vu que sur l'intervalle $] -3; +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, ou encore :

$$u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leq u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n , $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

- d.** La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante;
- la suite (u_n) est majorée par 0;

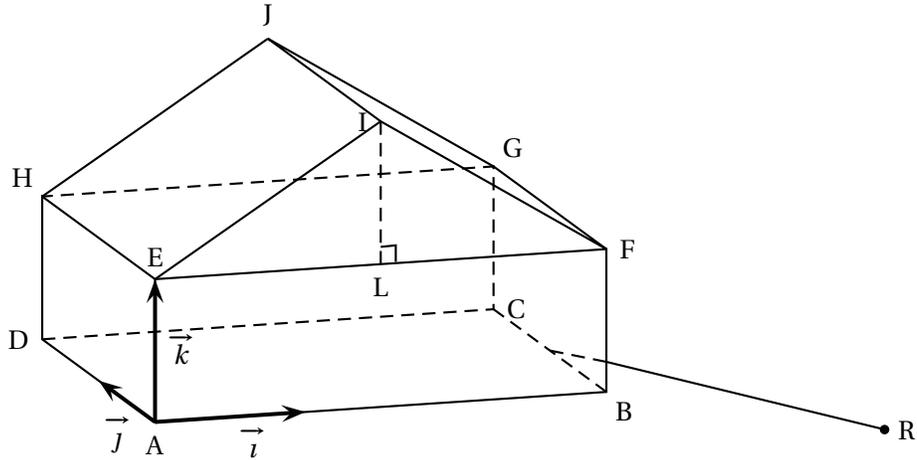
La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \leq 0$.

- e.** On résout dans $] -1; 0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$$f(x) = x \iff x^3 e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0 \iff x = 0, \text{ car on admet que l'équation } x^2 e^x - 1 = 0 \text{ n'a pas de solution dans l'intervalle }] -1; 0[.$$

Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 7 points



- On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Donc $G(3; 2; 1)$.
- On sait que $M(x; y; z) \in (EHI) \iff 2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi, par exemple $E(0; 0; 1) \in (EHI) \iff 2 \times 0 + 0 \times 0 - 3 \times 1 = d \iff d = -3$.
Donc $M(x; y; z) \in (EHI) \iff 2x - 3z = -3$
- Puisque (EIF) est isocèle en I le projeté orthogonal de I sur $[EF]$ est le milieu de $[EF]$; ces deux points ont donc la même abscisse qui est aussi celle du milieu de $[AB]$ soit $\frac{3}{2}$.
L'ordonnée de I est aussi celle de E soit 0 , enfin
 $I\left(\frac{3}{2}; 0; z\right) \in (EHI) \iff 2 \times \frac{3}{2} - 3z = -3 \iff 3z = 3 + 3 \iff z = 2$. Donc $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$.
- Avec le produit scalaire : avec $E(0; 0; 1)$ et $F(3; 0; 1)$, on a $\overrightarrow{IE} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc :

$$IE^2 = \frac{9}{4} + 0 + 1 = \frac{13}{4}, \text{ d'où } IE = \frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$IF^2 = \frac{9}{4} + 0 + 1 = \frac{13}{4}, \text{ d'où } IF = \frac{\sqrt{13}}{2};$$

Donc $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} = IE \times IF \times \cos(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF})$, soit :

$$-\frac{9}{4} + 0 + 1 = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} \times \cos(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF}) \iff \frac{-5}{4} = \frac{13}{4} \times \cos(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF}).$$

Finalement $\cos(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF}) = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}$. La calculatrice donne $(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF}) \approx 112,6^\circ$.

• Avec le triangle (IEL) rectangle en L (L projeté orthogonal de I sur (EF)) :

On a $L\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right)$, donc $IL^2 = 0 + 0 + 1^2 = 1$, d'où $IL = 1$;

On a vu que $EI = \frac{\sqrt{13}}{2}$, d'où $\cos(\widehat{EIL}) = \frac{IL}{EI} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$: la calculatrice donne $(\widehat{EIL}) \approx$

$56,30^\circ$; donc $\widehat{EIF} = 2\widehat{EIL} \approx 2 \times 56,30$, soit finalement $\widehat{EIF} \approx 112,6^\circ$.

5. a. On sait que $M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{RM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x-6 = -3t \\ y+3 = 4t \\ z+1 = 1t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \iff$

$$\begin{cases} x = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

b. $K(x; y; z)$ est commun à Δ et au plan (BFG) si ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de Δ et l'équation cartésienne du plan (BFG) soit si le triplet de réels $(x; y; z)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} x = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \\ x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \\ x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t = 3 \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \\ x = 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ y = -3+4 \\ z = -1+1 \\ x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Conclusion : $K(3; 1; 0)$.

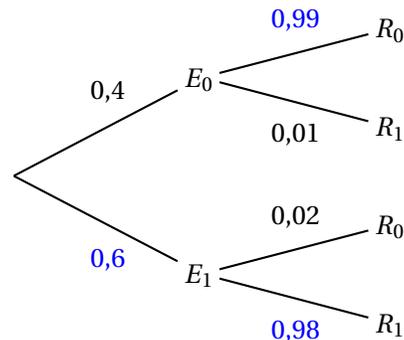
c. Avec $B(3; 0; 0)$ et $C(3; 2; 0)$ on remarque que les coordonnées de K sont les demi-sommes des coordonnées de B et de C , donc que K est le milieu du segment $[BC]$.

EXERCICE 4 7 points

Principaux domaines abordés : probabilités.

On peut compléter l'arbre pondéré :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 »;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 »;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :

$$p(E_0) = 0,4; \quad p_{R_0}(R_1) = 0,01; \quad p_{R_1}(R_0) = 0,02.$$

On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.

On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. $p(E_0 \cap R_0) = p(E_0) \times p_{E_0}(R_0) = 0,4 \times 0,99 = 0,396$.

2. On a aussi $p(E_1 \cap R_0) = p(E_1) \times p_{E_1}(R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.

D'après la loi des probabilités totales : $p(R_0) = p(E_0 \cap R_0) + p(E_1 \cap R_0) = 0,396 + 0,012 = 0,408$.

3. Avec $p(R_1) = 1 - p(R_0) = 1 - 0,408 = 0,592$;

$$p_{R_1}(E_0) = \frac{p(R_1 \cap E_0)}{p(R_1)} = \frac{p(E_0 \cap R_1)}{p(R_1)} = \frac{0,4 \times 0,01}{0,592} = \frac{0,004}{0,592} \approx 0,0067, \text{ soit environ } 0,007 \text{ au millième près.}$$

4. On a $p(\text{erreur de transmission}) = p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_0) = 0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,02 = 0,004 + 0,012 = 0,016$.

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$. Si x est la variable aléatoire égal au nombre d'octets transmis sans erreur, on a :

$$p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (1 - 0,88)^{10-7} = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (0,12)^3 \approx 0,0847 \text{ soit } 0,085 \text{ au millième près.}$$

6. On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,88^0 \times 0,12^{10} = 1 - 0,12^{10}$.

7. On a $p(X = 18) = 0,88^{18} \approx 0,109 > 0,1$. Donc $N_0 = 18$.