PGE ▪ PGO

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES
PRÉPARATION AU GRAND ORAL

CORRIGÉ OFFICIEL

ANNALES BAC
MATHÉMATIQUES
2022

237 Rue du Faubourg Saint-Honoré, 75008 Paris

0187660050 | contact@pge-pgo.fr | pge-pgo.fr

Corrigé du Baccalauréat Amérique du Sud
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ - Jour 2 - 27 septembre 2022

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 PROBABILITÉS **7 points**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

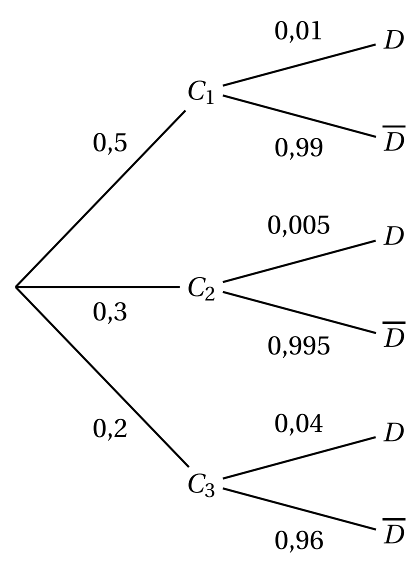
À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A

1.



2. On a $p\left(C_3 \cap D\right) = p\left(C_3\right) \times p_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = 0,008$.
3. De même $p\left(C_1 \cap D\right) = p\left(C_1\right) \times p_{C_1}(D) = 0,5 \times 0,01 = 0,005$.
   $p\left(C_2 \cap D\right) = p\left(C_2\right) \times p_{C_2}(D) = 0,3 \times 0,005 = 0,0015$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(D) = p\left(C_1 \cap D\right) + p\left(C_2 \cap D\right) + p\left(C_3 \cap D\right) = 0,005 + 0,0015 + 0,008 = 0,0145$.
4. On a $p_D\left(C_3\right) = \dfrac{p\left(D \cap C_3\right)}{p(D)} = \dfrac{0,008}{0,0145} \approx 0,55172$, soit $0,5517$ à 10^{-4} près.

PARTIE B

1. a. On a la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,0145)$, donc la probabilité qu'un lot possède exactement trois composants défectueux sur 20 est égale à :
   $\binom{20}{3}0,0145^3 \times (1 - 0,0145)^{17} \approx 0,00271$, soit $0,0027$ à 10^{-4} près.
   b. La probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux est égale à $(1 - 0,0145)^{20} \approx 0,74667$, soit $0,7467$ à 10^{-4} près.
   Donc la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est $1 - 0,74667 \approx 0,2533$.
2. X suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$, on a :
   $p(X = 0 \geqslant 0,85 \iff (1 - 0,0145)^n \geqslant 0,85$ ou encore $0,9855^n \geqslant 0,85$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $n \ln 0,9855 \geqslant \ln 0,85$ et enfin $n \leqslant \dfrac{\ln 0,85}{\ln 0,9855}$ (car $\ln 0,9855 < 0$).
   Or $\dfrac{\ln 0,85}{\ln 0,9855} \approx 11,1$.
   11 composants au maximum par lot conviennent : le directeur a raison.

PARTIE C

Le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise est égal à :

$$0,5 \times 15 + 0,3 \times 12 + 0,2 \times 9 = 7,5 + 3,6 + 1,8 = 12,9$$

soit 12,90 € par composant.

EXERCICE 2 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME **7 points**

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1. • $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times 0 = 0$;
   • $g(\mathrm{e}) = 2 \times (\mathrm{e} - 1) - \mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e}\ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$.

2. On sait que $\lim\limits_{x \to +0} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = -2$.

3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2 \times 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.

Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \text{e} > \ln x \iff \text{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0~;~\text{e}[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln \text{e} = \ln x \iff \text{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\text{e}~;~+\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln \text{e} < \ln x \iff \text{e} < x$, donc $g(\text{e}) = \text{e} - 2$ est le maximum de g sur $]0~;~+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -2	$\nearrow$	$\approx 0,718$	$\searrow$	$-\infty$

4.

- Sur l'intervalle $]0~;~\text{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme $-2 < 0 < \text{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0~;~\text{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
- Sur l'intervalle $]\text{e}~;~+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue; comme

$0,718 > 0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\text{e}~;~+\infty[$.

On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;

$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0~;~+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

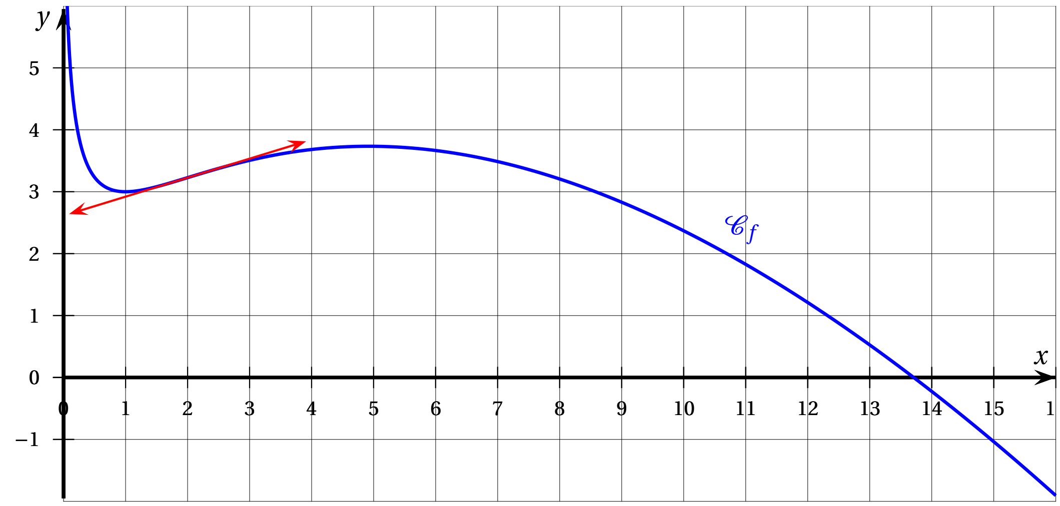
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0~;~+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$: f est croissante sur cet intervalle ;

$f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3,73)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	|| $+\infty$	↘	3	↗	$\approx 3,73$	↘	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0; 2]$ la fonction f est convexe ;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2\,;\,+\infty]$ la fonction f est concave ;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$ donc le point de coordonnées $(2\,;\,f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2 \approx 3,23$. (voir la figure : la tangente au point d'abscisse 2 traverse la courbe)

EXERCICE 3 SUITES **7 points**

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Diminuer de 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.
On multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
• $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$.

3. *Initialisation* : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times u_n$ puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :
$900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :
$1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est encore au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La récurrence précédente montre que :

— la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$;

— la suite (u_n) est minorée par 1 000

La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) rdt une suite géométrique de raison 0,9.

b. On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000\left(1 + 0,9^n\right)$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.

On a $u_n \leqslant 1020 \iff 1000\left(1 + 0,9^n\right) \leqslant 1020 \iff 1000 + 1000 \times 0,9^n \leqslant 1020$

$\iff 1000 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n \ln 0,9 \leqslant \ln 0,02 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$

(car $\ln 0,9 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1020$ est $n = 38$ ($u_{38} \approx 1018{,}25$).

b.

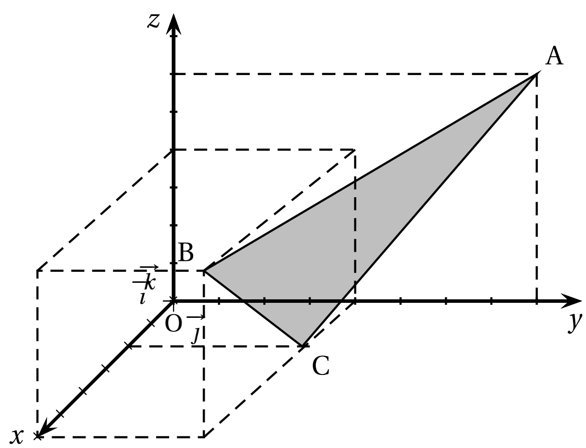
```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1 020:
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```

EXERCICE 4 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE **7 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 6-8+2 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-8+6 = 0$.
   Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc normal à ce plan.

   c. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.

   Avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-8\\z-6\end{pmatrix}$, on a donc :

   $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff x+2(y-8)-(z-6) = 0 \iff x+2y-z-16+6 = 0.$
   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff x+2y-z-10 = 0.$

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives (0; 0; 6) et (6; 6; 0).

   a. Un vecteur directeur de la droite (DE) est le vecteur $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$ ou plus simplement $\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   D'où $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{DM} = t \times \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$.

   Avec $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient :

   $$\overrightarrow{DM} = t\times\frac{1}{6}\overrightarrow{DE} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\times 1\\ y &=& t\times 1\\ z-6 &=& t\times(-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 6-t\end{array}\right.$$

b. On a I(4 ; 4 ; 2) ; ce point appartient bien à la droite (DE) car ces coordonnées correspondent à la valeur $t = 4$.

3. On considère le triangle ABC.

a. On a $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 36+16+4 = 56$ d'où $AB = \sqrt{56}$;
De même $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 4+16+36 = 56$ d'où $AC = \sqrt{56}$.
AB = AC donc ABC est un triangle isocèle en A.

b. I est le milieu de la base [BC] du triangle isocèle, donc (AI) est médiane et aussi hauteur du triangle. Son aire est donc égale à $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \frac{\text{AI}\times\text{BC}}{2}$. Avec I(4 ; 4 ; 2) :
$AI^2 = 4^2 + (-4)^2 + (-4)^2 = 16+16+16 = 3\times 16 = 16\times 3$, d'où $AI = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
$BC^2 = (-4)^2+0^2+(-4)^2 = 16+16 = 32$, d'où $BC = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
Donc $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{4\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{6}$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12+16+12 = 40$.

d. On a également $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.
On a donc $40 = \sqrt{56}\times\sqrt{56}\times\cos\widehat{BAC} \iff 40 = 56\times\cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{40}{56} = \dfrac{5}{7}$.
La calculatrice donne $\widehat{BAC}\approx 44,41$, soit $44,1°$ à 0,1 près.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.
Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
En déduire la distance du point O au plan (ABC).
Si K(x ; y ; z) est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) le vecteur $\overrightarrow{OK}$ orthogonal au plan est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$.

On a donc $\overrightarrow{OK} = \alpha\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \alpha\\ y &=& 2\alpha\\ z &=& -\alpha\end{array}\right.$

Mais K appartient au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan ; on a donc :
$K\in(\text{ABC}) \iff \alpha+2\times 2\alpha-(-\alpha)-10 = 0 \iff 6\alpha-10 = 0 \iff 6\alpha = 10 \iff 3\alpha = 5 \iff \alpha = \dfrac{5}{3}$.
Les coordonnées de K sont donc $\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\ ;\ -\dfrac{5}{3}\right)$: ce sont bien celles de H !
La distance de O au plan (ABC) est donc égale à OH.
$OH^2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}+\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{9} = \dfrac{150}{9}$.
Donc $OH = \sqrt{\dfrac{150}{9}} = \dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{25\times 6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.