EDHEC AST 1 2005

Exercice 1

On pourra noter indifféremment C_n^k *ou* $\binom{n}{k}$ *les coefficients de la formule du binôme de Newton.*

Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier naturel au moins égal à 2.
Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité de faire "face" à chaque lancer est égale à $\frac{1}{2}$. Chacun des deux joueurs lance la pièce n fois. On désigne par X, Y, Z et T les variables aléatoires suivantes :

X représente le nombre de "face" obtenus par A ; Y représente le nombre de "face" obtenus par B ;
Z = X + Y ; T = X – Y.

1. a. Déterminer la loi suivie par les variables aléatoires X et Y.
   b. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire Z.
2. a. Donner la probabilité de l'évènement (Z = 1).
   b. Donner la probabilité de l'évènement (Z = n).
3. a. Exprimer l'évènement (Z = n) à l'aide des évènements (X = j) et ($Y = k$), où k sera exprimé en fonction de j.
   b. En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$.
4. a. Exprimer l'évènement (T = 0) à l'aide des évènements (X = j) et ($Y = k$), où k sera exprimé en fonction de j.
   b. Déduire alors du 3° b la probabilité de l'évènement (T = 0).
5. a. Calculer la covariance de Z et de T.
   b. Z et T sont-elles indépendantes ? On pourra considérer les évènements (Z = 1) et (T = 0).

Exercice 2

On désigne par $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré au plus 2, à coefficients réels, auxquels on adjoint le polynôme nul.
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et soient a, b et c trois nombres réels appartenant à I et tels que $a < b < c$.

PARTIE A

On considère l'application u de E dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout élément P de E associe le triplet $(P(a), P(b), P(c))$.
1. Montrer que u est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
2. a. Montrer qu'il existe un unique polynôme A appartenant à E que l'on explicitera tel que $A(a) = 1$, $A(b) = 0$ et $A(c) = 0$.
   b. Donner sans justification l'expression des deux polynômes B et C appartenant à E tels que :
   $B(a) = 0$, $B(b) = 1$ et $B(c) = 0$ et $C(a) = 0$, $C(b) = 0$ et $C(c) = 1$.
3. a. Montrer que (A, B, C) est une base de E.
   b. Soit P un polynôme appartenant à E : vu le 3° a, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tel que $P(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x)$. Calculer α, β et γ en fonction de P.

PARTIE B

1. Soit g une fonction définie et de classe C^2 sur I et telle que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $w \in]a, c[$ tel que l'on ait $g''(w) = 0$.
On donnera les hypothèses précises permettant l'emploi de ce théorème.
2. Montrer que la propriété (1) suivante :

(1) Il existe $w \in]a, c[$ tel que l'on ait : $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{f''(w)}{2}$

est vraie pour $f = A$, pour $f = B$ et pour $f = C$, où A, B et C sont les polynômes définis dans la partie A.
3. Soit f une fonction de classe C^2 sur I.
   a. On pose $P(x) = f(a)A(x) + f(b)B(x) + f(c)C(x)$. Vérifier que P est un élément de E qui prend les mêmes valeurs que f en a, b et c.
   b. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - P(x)$. Vérifier que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. En déduire que f possède la propriété (1).
   c. Soit x_0 un point de I. Montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$.

EDHEC AST 1 2005

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1

1. a. Les n lancers de la pièce effectués par A sont des expériences indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{1}{2}$, donc ils constituent un schéma de Bernoulli fini pour lequel X représente le nombre de succès : donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. De même Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b. Z représente le nombre total de "face" obtenus par A et B lors des $2n$ lancers qu'ils effectuent ensemble : donc pour la même raison qu'au 1° a, Z suit la loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$.

2. a. D'après la formule de la loi binomiale, on a $P(Z=1) = \binom{2n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = C_{2n}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{n}{2^{2n-1}}$.

b. De même on a $P(Z=n) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

3. a. L'évènement $(Z = n)$ signifie que les joueurs A et B ont effectué n lancers à eux deux : donc cet événement est réalisé si et seulement s'il existe $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tel que A ait effectué j lancers et que B ait effectué $k = n - j$ lancers. Autrement dit : $(Z = n) = \bigcup_{j=0}^{n}\left[(X=j)\cap(Y=n-j)\right]$.

b. On en déduit que $P(Z = n) = P\left(\bigcup_{j=0}^{n}\left[(X=j)\cap(Y=n-j)\right]\right) = \sum_{j=0}^{n} P\left[(X=j)\cap(Y=n-j)\right]$ car les évènements $\left[(X=j)\cap(Y=n-j)\right]$ sont deux à deux incompatibles, et les évènements $(X = j)$ et $(Y = n - j)$ étant indépendants, on a : $P(Z=n) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=n-j) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^{n-j}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{n-j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par identification avec le résultat du 2° b, on en déduit que $S = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}$, ou $S = \sum_{j=0}^{n} C_n^j C_n^{n-j} = C_{2n}^n$.

4. a. L'évènement $(T = 0)$ signifie que les joueurs A et B ont effectué le même nombre de lancers : donc cet événement est réalisé si et seulement s'il existe $j \in \{0, 1, ..., n\}$ tel que A ait effectué j lancers et que B ait effectué $k = j$ lancers. Autrement dit : $(T = 0) = \bigcup_{j=0}^{n}\left[(X=j)\cap(Y=j)\right]$.

b. On en déduit que $P(T = 0) = P\left(\bigcup_{j=0}^{n}\left[(X=j)\cap(Y=j)\right]\right) = \sum_{j=0}^{n} P\left[(X=j)\cap(Y=j)\right]$ car les évènements $\left[(X=j)\cap(Y=j)\right]$ sont deux à deux incompatibles, et comme les évènements $(X = j)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, on obtient :

$$P(T=0) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=j) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^j\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\left[C_n^j\right]^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Mais si $j \in \{0, 1, ..., n\}$ on a $C_n^j = C_n^{n-j}$ ou $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$, donc : $P(T=0) = \frac{S}{2^{2n}} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

5. a. On a : $\text{Cov}(Z, T) = \text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) = V(X) - V(Y)$ en utilisant les propriétés connues de la covariance, et comme X et Y suivent la même loi, on obtient $\text{Cov}(Z, T) = 0$.

b. On remarque que $P(Z = 1) \times P(T = 0) = \dfrac{n}{2^{2n-1}} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, or l'évènement $[(Z = 1) \cap (T = 0)]$ est impossible, car il serait équivalent à $[(X = \frac{1}{2}) \cap (Y = \frac{1}{2})]$, or X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $P[(Z = 1) \cap (T = 0)] = 0$. Donc $P(Z = 1) \times P(T = 0) \neq P[(Z = 1) \cap (T = 0)]$, de sorte que Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

PARTIE A

1. Pour tous réels λ et μ et tous éléments P et Q de E on a :
$u(\lambda P + \mu Q) = ((\lambda P + \mu Q)(a), (\lambda P + \mu Q)(b), (\lambda P + \mu Q)(c)) = (\lambda P(a) + \mu Q(a), \lambda P(b) + \mu Q(b), \lambda P(c) + \mu Q(c))$
$= \lambda (P(a), P(b), P(c)) + \mu (Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda\, u(P) + \mu\, u(Q)$, donc u est linéaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
Soit P un élément du noyau de u : alors $u(P) = (P(a), P(b), P(c)) = (0, 0, 0)$ donc $P(a) = 0$, $P(b) = 0$, $P(c) = 0$ et P admet au moins les trois racines distinctes a, b et c. Mais si P est non nul alors il est de degré au plus 2 et ne peut admettre plus de deux racines, donc P est le polynôme nul. Donc le noyau de u est réduit au polynôme nul, ce qui montre que u est injective de E dans $\mathbb{R}^3$. En outre E et $\mathbb{R}^3$ ont la même dimension 3, donc comme u est injective, elle est bijective, donc u est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
2. a. Comme u est bijective de E dans $\mathbb{R}^3$, l'élément (1, 0, 0) de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent A dans E par u. On peut obtenir $A(x) = mx^2 + nx + p$ en résolvant le système en (m, n, p) obtenu en écrivant les équations $A(a) = 1$, $A(b) = 0$, $A(c) = 0$, mais il est plus simple de procéder comme suit. Comme $A(b) = 0$ et $A(c) = 0$, $A(x)$ admet $(x - b)(x - c)$ en facteur ; comme A est de degré au plus 2, il est donc de la forme $A(x) = m(x - b)(x - c)$ où m est une constante réelle. Celle-ci est déterminée en utilisant le fait que $A(a) = 1$: on en déduit $m(a - b)(a - c) = 1$, donc $m = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$. On en déduit $A(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$.

b. De même on obtient $B(x) = \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $C(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

3. a. (A, B, C) est l'image par u^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, or u^{-1} est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$ donc (A, B, C) est une base de E.
b. En choisissant successivement $x = a$, $x = b$ et $x = c$ on obtient $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$.

PARTIE B

1. La fonction g est définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$ et $g(a) = g(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y \in\ ]a, b[$ tel que l'on ait $g'(y) = 0$. De même g est définie et continue sur $[b, c]$ et dérivable dans $]b, c[$ et $g(b) = g(c)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $z \in\ ]b, c[$ tel que l'on ait $g'(z) = 0$. Enfin g' est définie et continue sur $[y, z]$ et dérivable dans $]y, z[$ et $g'(y) = g'(z)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $w \in\ ]y, z[$ tel que l'on ait $g''(w) = 0$. Comme $a < y < w < z < c$, on a bien $w \in\ ]a, c[$.
2. En remplaçant f par A dans (1), compte tenu de ce que l'on a $A(a) = 1$, $A(b) = 0$ et $A(c) = 0$, on obtient :
$$\frac{A(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{A(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{A(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$$
tandis qu'en dérivant deux fois $A(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$ on obtient $A''(x) = \dfrac{2}{(a-b)(a-c)}$: ainsi la propriété (1) est vraie pour $f = A$, et de plus le choix de $w \in\ ]a, c[$ est arbitraire. Il en est de même pour $f = B$ et pour $f = C$.
3. a. Comme P est combinaison linéaire de trois éléments de E, c'est un élément de E ; de plus en remplaçant successivement x par a, b et c, on obtient $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$ vu les propriétés de A, B et C.
b. Vu le 3° a, il est évident que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Donc g possède la propriété (1), autrement dit :

(2) Il existe $w \in\ ]a, c[$ tel que l'on ait : $\dfrac{g(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{g(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{g(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{g''(w)}{2}$.

Or comme on l'a remarqué au 2°, la propriété (1) est vraie pour $f = A$, pour $f = B$ et pour $f = C$ et ceci pour tout choix de $w \in\ ]a, c[$: en effectuant la combinaison linéaire des trois égalités obtenues ainsi avec les coefficients $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$, on en déduit que la propriété (1) est vraie pour $f = P$ et ceci pour tout choix de $w \in\ ]a, c[$:

(3) Pour tout $w \in\ ]a, c[$ on a : $\dfrac{P(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{P(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{P(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{P''(w)}{2}$.

En additionnant (2) et (3) pour la valeur de w définie dans (2), on en déduit que $f = g + P$ possède la propriété (1).

c. On pose $a = x_0 - h$, $b = x_0$ et $c = x_0 + h$: alors comme I est ouvert, pour h assez petit, a, b et c appartiennent à I, et pour $h > 0$ on a $a < b < c$. Donc vu ce qui précède, il existe $w \in \,]x_0 - h, x_0 + h[$ tel que l'on ait :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(w)}{2}, \text{ soit } \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(w).$$

Comme $|w - x_0| < h$, quand h tend vers 0, w tend vers x_0 , et comme f est de classe C^2 sur I, sa dérivée seconde f'' est continue sur I, donc $f''(w)$ tend vers $f''(x_0)$, ce qui montre le résultat voulu pour h tendant vers 0 par valeurs positives. Dans le cas où h tend vers 0 par valeurs négatives, il suffit de poser $k = -h$ pour obtenir le même résultat.