SUJET DE MATHEMATIQUES 2004

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. On désigne par f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que 3 est une valeur propre de f et trouver un vecteur propre $\vec{u}$ associé à cette valeur propre.

b. Montrer que f admet une seule autre valeur propre μ que l'on déterminera. Donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre μ.

c. A est-elle diagonalisable ?

d. Montrer que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe deux réels a et b tels que $f(\vec{x}) = a\vec{u} + b\vec{x}$.

2. Soit h un endomorphisme de E possédant la propriété suivante : il existe un vecteur non nul $\vec{w}$ de E tel que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, $h(\vec{x})$ est combinaison linéaire de $\vec{w}$ et de $\vec{x}$. Soient $\vec{s}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs de E tels que $(\vec{w}, \vec{s}, \vec{t})$ constitue une base de E.

a. Montrer que $\vec{w}$ est un vecteur propre de h. Soit λ la valeur propre associée à ce vecteur propre.

b. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que l'on ait : $h(\vec{s}) = \alpha\vec{w} + \gamma\vec{s}$, $h(\vec{t}) = \beta\vec{w} + \gamma\vec{t}$. On pourra considérer le vecteur $h(\vec{s} - \vec{t})$.

c. Déterminer la matrice B de h dans la base $(\vec{w}, \vec{s}, \vec{t})$.

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur λ, α, β, γ pour que B soit diagonalisable.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^3$.

1. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in \,]0, 1]$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3$ est convergente. On pourra remarquer que $u_n^3 = u_n - u_{n+1}$.

3. a. Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.

Exercice 3

Si A et B sont deux évènements, on désigne par $P(A / B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B réalisé.

On considère une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir "face" est égale à $\frac{2}{3}$. On lance cette pièce plusieurs fois de suite. Si on obtient "face" deux fois de suite, on dit que l'on a obtenu un doublé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : « on obtient un doublé pour la première fois aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Calculer p_1, p_2, p_3.

2. On désigne par B l'évènement : « le premier lancer donne "pile" » et par C l'évènement : « le premier lancer donne "face" et le deuxième lancer donne "pile" ».

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P(A_{n+2} / B) = P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2} / C) = P(A_n)$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n$.

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'évènement : « on obtient au moins un doublé au cours des $n + 1$ premiers lancers ». Calculer la probabilité de D_n .

CORRIGE MATHEMATIQUES

Corrigé de l'exercice 1

1. a. La matrice de $f - 3\,Id_E$ est $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre si et seulement si $(A - 3I_3)X = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: ceci équivaut au système $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, or l'ensemble des solutions de ce système est $\{(x_1, -x_1, -2x_1) ; x_1 \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble n'est pas réduit à $\{(0, 0, 0)\}$, donc 3 est une valeur propre de f, et un vecteur propre associé à cette valeur propre est $\vec{u} = (1, -1, -2)$. De plus la dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est égale à 1, donc $(\vec{u})$ est une base de E_3.

b. Le système $(A - \lambda I_3)X = 0$ s'écrit $\begin{cases} -\lambda x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$: par la méthode du pivot, on vérifie qu'il admet la seule solution (0, 0, 0), sauf pour $\lambda = 3$, et pour $\lambda = 2$ pour lequel il équivaut à l'équation $-2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Donc f admet la seule autre valeur propre 2, et une base du sous-espace propre associé E_2 est $(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (1, -2, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -2)$.

c. La somme des dimensions des sous-espaces propres pour f est égale à la dimension de E, donc f est diagonalisable, donc sa matrice A est diagonalisable.

d. On sait que $E_3 \oplus E_2 = E$, donc tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur $\vec{y}$ de E_3 et d'un vecteur $\vec{z}$ de E_2. Alors $f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{z}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = 3\vec{y} + 2\vec{z} = \vec{y} + 2\vec{x}$, et comme $\vec{y}$ appartient à E_3, il existe un réel a tel que $\vec{y} = a\vec{u}$. On en déduit $f(\vec{x}) = a\vec{u} + b\vec{x}$ avec $b = 2$.

2. a. Par hypothèse, $\vec{w}$ n'est pas nul, et $h(\vec{w})$ est combinaison linéaire de $\vec{w}$, donc il existe un réel λ tel que $h(\vec{w}) = \lambda\vec{w}$, donc $\vec{w}$ est un vecteur propre de h.

b. Par hypothèse, il existe quatre réels α, β, γ, δ tels que l'on ait : $h(\vec{s}) = \alpha\vec{w} + \gamma\vec{s}$, $h(\vec{t}) = \beta\vec{w} + \delta\vec{s}$. Reste à vérifier que $\gamma = \delta$: or $h(\vec{s} - \vec{t}) = \alpha\vec{w} + \gamma\vec{s} - \beta\vec{w} - \delta\,\vec{t}$, et il existe deux réels ρ et σ tels que l'on ait $h(\vec{s} - \vec{t}) = \rho\vec{w} + \sigma(\vec{s} - \vec{t})$. Par identification, on en déduit : $\alpha - \beta = \rho$, $\gamma = \sigma$, $\delta = \sigma$, donc $\delta = \gamma$.

c. On en déduit que la matrice de g dans la base $(\vec{w}, \vec{s}, \vec{t})$ est $B = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

d. Comme B est triangulaire, les valeurs propres de B sont ses éléments diagonaux, donc sont λ et γ. Si $\lambda \neq \gamma$, alors B admet deux valeurs propres distinctes, et le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension au moins égale à 1 ; en outre, $B - \gamma I_3 = \begin{pmatrix} \lambda-\gamma & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, de sorte que le noyau de $h - \gamma Id_E$ est de dimension 2, or ce noyau n'est autre que le sous-espace propre associé à la valeur propre γ. La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc au moins égale à la dimension de l'espace, donc h est diagonalisable. Si $\lambda = \gamma$, alors B admet une seule valeur propre, donc est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale, donc si et seulement si $\alpha = \beta = 0$. La condition demandée est donc $[(\lambda \neq \gamma)$ ou $(\lambda = \gamma$ et $\alpha = \beta = 0)]$.

Corrigé de l'exercice 2

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit (A_n) l'assertion : $0 < u_n < 1$. Par hypothèse, (A_0) est vraie. Supposons (A_n) vraie : alors $0 < u_n < 1$, donc $0 < u_n^3 < u_n < 1$: on en déduit $0 < u_n - u_n^3 < 1$, autrement dit $0 < u_{n+1} < 1$. Donc (A_{n+1}) est vraie. On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n) est vraie, ce qui implique $u_n \in]0, 1]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = u_n - u_n^3 \leq u_n$ car $u_n > 0$ vu le a, donc la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge d'après le théorème des suites monotones, et en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^3$ on obtient $\ell = \ell - \ell^3$, ce qui donne $\ell = 0$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n^3 = \sum_{n=0}^{p}(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{p} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_{n+1} = u_0 - u_{p+1}$, donc la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3$ admet une limite finie, à savoir $u_0 - \ell$, donc cette série converge.

3. a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n - u_n^3}{u_n} = 1 - u_n^2$ donc le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que u_{n+1} est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.

b. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_n^3}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$, or $\dfrac{u_n^2}{u_{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{u_n} = u_n$, donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

c. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \sum_{n=0}^{p}\frac{1}{u_{n+1}} - \sum_{n=0}^{p}\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_0}$, or $\dfrac{1}{u_{p+1}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$, donc cette série diverge. Leurs termes généraux étant positifs et équivalents, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.

Corrigé de l'exercice 3

1. Désignons selon l'usage par PF l'évènement « le premier lancer donne "pile" et le deuxième lancer donne "face" », et de même les autres résultats possibles ; X désigne un résultat indifférent (pile ou face). Alors p_1 est la probabilité de FF, soit $\dfrac{4}{9}$; p_2 est la probabilité de PFF, soit $\dfrac{4}{27}$; p_3 est la probabilité de $XPFF$, soit $\dfrac{4}{27}$.

2. a. Si B est réalisé, l'évènement A_{n+2} est identique à l'évènement A'_{n+1} = « on obtient un doublé pour la première fois aux $(n + 1)$-ième et $(n + 2)$-ième lancers après le premier lancer », or cet évènement A'_{n+1} a la même probabilité que A_{n+1}. De même, si C est réalisé, l'évènement A_{n+2} est identique à l'évènement A''_n = « on obtient un doublé pour la première fois aux n-ième et $(n + 1)$-ième lancers après les deux premiers lancers », or cet évènement A''_n a la même probabilité que A_n. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P(A_{n+2} / B) = P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2} / C) = P(A_n)$.

b. Remarquons que (A_1, B, C) est un système complet d'évènements, et d'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(A_{n+2}) = P(A_{n+2} / A_1)\, P(A_1) + P(A_{n+2} / B)\, P(B) + P(A_{n+2} / C)\, P(C)$, or
$P(A_{n+2} / B) = P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2} / C) = P(A_n)$, de plus il est clair que $A_{n+2} \cap A_1 = \varnothing$ donc $P(A_{n+2} / A_1) = 0$.
Enfin il est clair que $P(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P(C) = \dfrac{2}{9}$, de sorte que l'on a bien $p_{n+2} = \dfrac{1}{3} p_{n+1} + \dfrac{2}{9} p_n$.

3. a. La suite (p_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2 ; son équation caractéristique est $r^2 = \frac{r}{3} + \frac{2}{9}$,

ses solutions sont $r_1 = \frac{2}{3}$ et $r_2 = -\frac{1}{3}$: il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ on ait $p_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. En considérant successivement $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le

système $\begin{cases} \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9}\lambda + \frac{1}{9}\mu = \frac{4}{27} \end{cases}$ donc la solution est $\lambda = \frac{4}{9}, \mu = -\frac{4}{9}$; on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}.$$

b. Il est clair que $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et que les évènements A_1 , ..., A_n sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\mathrm{P}(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2} - 4\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1-(2/3)^n}{1-(2/3)} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1-(-1/3)^n}{1-(-1/3)} = 1 - \frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

On peut remarquer que la limite de $\mathrm{P}(D_n)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1, or celle-ci est égale à la probabilité de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ qui est l'évènement « on obtient un doublé au bout d'un nombre fini de lancers » : on peut donc dire que cet évènement est presque certain.

RAPPORT DE CORRECTION MATHEMATIQUES

Remarques générales

Le point le plus marquant est la difficulté que semblent manifester les candidats à rédiger correctement leurs raisonnements et à exposer leur méthode de démonstration. Ils se réfugient trop souvent dans des calculs non commentés.

Des erreurs de logique de base sont fréquentes, comme la confusion entre condition nécessaire et condition suffisante. En outre des résultats aberrants sont parfois obtenus sans que cela semble émouvoir outre mesure les candidats. Dans une telle situation, il est préférable de signaler sur la copie ses doutes quant à la vraisemblance des résultats obtenus.

Exercice 1

La plupart des candidats emploient les techniques classiques de détermination des valeurs propres et des sous-espaces propres, notamment par le calcul du polynôme caractéristique (qui n'est pas au programme du concours) ou par la résolution du système linéaire associé. On peut simplement regretter des calculs parfois lourds ou entachés d'erreurs, ainsi que l'assertion encore trop fréquente : "A est inversible donc elle est diagonalisable". On mentionnera encore des rédactions incorrectes comme "la dimension de A est égale au nombre de vecteurs propres de A donc elle est diagonalisable".

Pour traiter la question 1° d, on avait grandement intérêt à se placer dans une base de vecteurs propres, ou à écrire un vecteur de E comme somme de deux vecteurs propres, ce que peu de candidats ont pensé à faire.

L'objet de la question 2° b était essentiellement de montrer que c'est la même constante γ qui intervient dans les écritures des deux vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$, d'où l'intérêt de considérer $h\left(\vec{s}-\vec{t}\right)$, qui est lui-même combinaison linéaire de $\vec{w}$ et de $\vec{s}-\vec{t}$. Reste alors à utiliser le caractère libre de la famille $\left(\vec{w},\vec{s},\vec{t}\right)$, ce que très peu de candidats ont vu, pour identifier les coefficients des décompositions de $h\left(\vec{s}-\vec{t}\right)$ et $h\left(\vec{s}\right)-h\left(\vec{t}\right)$.

Si les candidats ont été assez nombreux à déterminer la matrice de h dans la base $\left(\vec{w},\vec{s},\vec{t}\right)$, bien peu ont été en mesure de l'utiliser pour discuter la diagonalisabilité de h. Dans le cas $\lambda \neq \gamma$, le fait que le sous-espace propre pour la valeur propre γ est de dimension 2 provenait immédiatement du fait que $B-\gamma I_3$ comporte deux lignes nulles. Par contre, si $\lambda = \gamma$, la matrice B n'admettant qu'une valeur propre n'est diagonalisable que si elle est diagonale.

Exercice 2

Il s'agissait de l'étude d'une suite récurrente très simple et de deux séries associées.

La difficulté du 1° a provenait du fait que l'on ne pouvait faire directement de récurrence sur la propriété demandée, mais qu'il fallait la limiter à $u_n \in \,]0, 1[$. Malheureusement, le manque de rigueur dans la gestion des inégalités (choix entre $\leq$ et $<$) a fait que de nombreux candidats ne se sont pas rendu compte de cet obstacle.

Le fait qu'une suite soit décroissante et minorée par 0 n'implique pas qu'elle converge vers 0 : le passage à la limite dans la relation de récurrence était requis pour déterminer la limite de cette suite.

Si les candidats ont compris dans l'ensemble le principe du télescopage de termes, trop rares sont ceux qui l'effectuent sur les sommes partielles de la série considérée et non sur la série elle-même, ce qui les fait calculer sur des séries divergentes.

La notion d'équivalence de suites semble relativement bien comprise, mais son emploi pour l'étude de la nature des séries est soit absent, soit incomplet en raison de l'oubli de la condition de positivité des termes généraux des séries considérées.

Exercice 3

Cet exercice de probabilités est de loin celui qui a causé le plus de difficulté aux candidats. Il s'agissait pourtant d'une situation simple et classique de survenance d'un premier doublé dans un schéma de Bernoulli.

Le calcul de p_3 dans la question 1° était souvent erroné, car les candidats ont sans doute cru à une progression géométrique, ou ne se sont pas rendu compte que le résultat du premier lancer était indifférent.

Très rares sont ceux qui ont tenté d'expliquer pour quelle raison les probabilités considérées dans le 2° étaient égales, et encore plus rares sont ceux qui y sont parvenus à peu près correctement.

Comme on pouvait s'en rendre compte avec un peu d'attention, (B, C) ne constitue pas un système complet d'évènements, et il fallait donc faire intervenir également l'évènement A_1 qui était évidemment incompatible avec A_{n+2} , ce qui permettait d'obtenir la formule demandée.

L'étude de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 pouvait se faire soit par la détermination des solutions de l'équation caractéristique, soit par récurrence puisque l'expression de p_n était fournie, mais dans ce dernier cas, il fallait faire une récurrence d'ordre 2 car p_{n+2} est exprimé en fonction de p_{n+1} et de p_n : autrement dit il fallait d'abord vérifier l'assertion aux rangs 1 et 2 puis supposer qu'elle est vraie aux rangs n et $n + 1$ pour l'établir au rang $n + 2$.

La dernière question n'a pratiquement pas été traitée, et les quelques candidats qui ont reconnu la réunion d'une suite d'évènements deux à deux incompatibles n'ont pas tous été en mesure de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Conclusion

La structure de l'épreuve en trois exercices portant chacun sur une partie du programme (algèbre, analyse, probabilités) et la progressivité des questions dans chacun des exercices doivent permettre aux candidats de valoriser au mieux leur investissement dans sa préparation. Si la connaissance de l'analyse apparaît correcte, il leur est recommandé de mettre l'accent sur la maîtrise de l'algèbre linéaire et surtout sur la compréhension des notions de base des probabilités au programme de cette épreuve.